

# Das Stabilitätsverhalten eines Plasmatorus mit Oberflächenströmen

Von E. MARTENSEN

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München  
(Z. Naturforsch. 17 a, 733—762 [1962]; eingegangen am 20. April 1962)

The magneto-hydrodynamic stability of a toroidal gas discharge is considered by means of a variational principle (energy principle) due to BERNSTEIN, FRIEMAN, KRUSKAL and KULSRUD. The plasma is supposed to be surrounded by a vacuum and an external conductor and the electric currents are placed on the plasma-vacuum interface entirely. After some remarks about the mathematical formulation of the problem a rapidly converging numerical method is described, which solves the stability problem for quite arbitrary meridional cross sections of the equilibrium configuration. Examples are given and it turns out, that the basic geometry, especially the location assumed for the plasma torus is very important for the stability. Furthermore there are significant deviations from the well-known behavior of an analogous cylinder configuration. The numerical procedure is verified by comparison of the results in the limit for a very thin torus with the known solution for a plasma cylinder.

Die Bewegungsgleichungen eines beliebigen, zweifach zusammenhängenden Plasmas  $\mathfrak{P}$ , das von einem äußeren Leiter durch ein (dreifach zusammenhängendes) Vakuumgebiet  $\mathfrak{V}$  getrennt ist und aus einer durch Magnetfelder bestimmten Gleichgewichtslage heraus „kleine Schwingungen“ vollführt, wurden von BERNSTEIN, FRIEMAN, KRUSKAL und KULSRUD<sup>1,2</sup> formuliert, desgleichen alle dazu erforderlichen Randbedingungen. Diesen Autoren gelang es gleichzeitig, auf dem Wege über ein äquivalentes, Energieprinzip genanntes Variationsproblem die Frage des Stabilitätsverhaltens der betrachteten Anordnung in vielen Fällen einer praktischen Behandlung zuzuführen.

Auf dieser Grundlage wurden erstmalig numerische Stabilitätsrechnungen von LÜST, SUYDAM, RICHTMYER, ROTENBERG und LEVY<sup>3</sup> für den Fall des reinen Oberflächenstroms auf der Trennfläche zwischen Plasma und Vakuum durchgeführt. Dabei wird die Geometrie von Plasmaoberfläche  $\mathfrak{S}$  und äußerem Leiter  $\mathfrak{S}'$  durch je einen *Kreistorus* bestimmt, jedoch in der Weise, daß die meridionalen Schnittkreise  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{C}'$  dieser Flächen mit der rechten  $(x, y)$ -Halbebene Koordinatenlinien der sogen. Toruskoordinaten darstellen, mit anderen Worten, die Toruskoordinatenflächen  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S}'$  entstehen durch Rotation von Toruskoordinatenlinien um die  $y$ -Achse. Wir wollen die Orientierung des Azimutal-

winkels  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  dabei so festlegen, daß  $\alpha$  beim Heraustreten aus der rechten  $(x, y)$ -Halbebene mit Null beginnend positiv gezählt wird (Abb. 1). Indem wir auf die Geometrie der erzeugenden Kreise  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{C}'$  etwas näher eingehen, mögen  $r$  bzw.  $r'$  ihre Radien und  $R$  bzw.  $R'$  die Abstände ihrer Mittelpunkte von der Symmetrieachse, hier also der

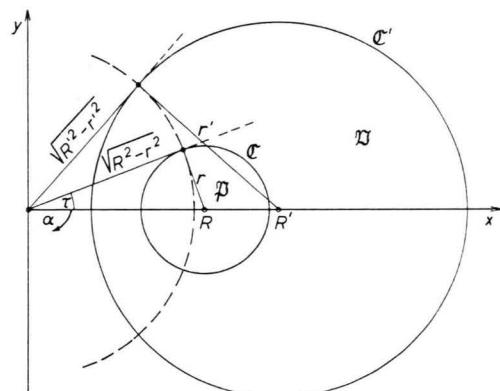


Abb. 1. Die Erzeugung von Toruskoordinatenflächen.

$y$ -Achse, bedeuten. Sei ferner  $2\tau$  der Winkel, unter dem  $\mathfrak{C}$  und damit jeder meridionale Schnitt des Kreistorus  $\mathfrak{S}$  vom Ursprung des Koordinatensystems aus gesehen erscheint, und

$$a = \tan \tau = r / \sqrt{R^2 - r^2} \quad (1)$$

das „Aspektverhältnis“<sup>4</sup> von  $\mathfrak{S}$ , so wird die Schar

<sup>3</sup> R. LÜST, B. R. SUYDAM, R. D. RICHTMYER, A. ROTENBERG u. D. LEVY, Phys. Fluids 4, 891 [1961].

<sup>4</sup> In der unter Anm. <sup>3</sup> genannten Arbeit findet man den zu (1) reziproken Ausdruck  $\cot \tau$  als Definition des Aspektverhältnisses bei einem Kreistorus. Die hier gewählte Form (1) besitzt den Vorteil, eine geeignete Verallgemeinerung auf beliebige torusartige Berandungen zuzulassen (näheres in Abschn. 7 dieser Arbeit).

<sup>1</sup> I. B. BERNSTEIN, E. A. FRIEMAN, M. D. KRUSKAL u. R. M. KULSRUD, Project Matterhorn, Princeton University, Princeton, N. J., PM-S-25, NYO-7315 [1957]; Proc. Roy. Soc., Lond. A 244, 17 [1958].

<sup>2</sup> I. B. BERNSTEIN, E. A. FRIEMAN, M. D. KRUSKAL u. R. M. KULSRUD, Project Matterhorn, Princeton University, Princeton, N. J., Appendix to PM-S-25, NYO-7896 [1957].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

der erwähnten Koordinatenlinien durch alle Kreise  $\mathfrak{C}$  mit der Eigenschaft

$$r = \text{const} \operatorname{tg} \tau$$

beschrieben oder, was nach (1) bzw. Abb. 1 dasselbe bedeutet, durch Kreise, deren durch den Ursprung gehende Tangenten die gleiche Länge

$$\sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R'^2 - r'^2}$$

besitzen (die Daten  $r'$ ,  $R'$  des äußeren Leiters werden dabei als von vornherein fest vorgegeben angesehen). Somit bestimmt sich der Mittelpunkt eines beliebigen Kreises  $\mathfrak{C}$  dieser Schar aus

$$R = \sqrt{R'^2 - r'^2 + r^2}. \quad (2)$$

Da für  $\mathfrak{C}$  nur  $r < r'$  in Frage kommt, folgt stets  $R < R'$ , d. h. der Mittelpunkt des Plasmaquerschnittes ist bei den gerechneten Beispielen<sup>3</sup> stets von der Mitte des Leiterquerschnitts aus nach innen zur Symmetriearchse hin fortgerückt (Abb. 1).

In der vorliegenden Arbeit wird ein numerisches Verfahren beschrieben, welches das Stabilitätsverhalten des Plasmas für *beliebige torusartige Geometrien* festzustellen gestattet. Die Plasmaoberfläche  $\mathfrak{S}$  und der äußere Leiter  $\mathfrak{S}'$  werden dabei von beliebigen, in der rechten  $(x, y)$ -Halbebene liegenden, geschlossenen Kurven  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{C}'$  durch Drehung um die  $y$ -Achse erzeugt (Abb. 2). Dadurch ist es insbesondere möglich, solche Fälle zu behandeln, in

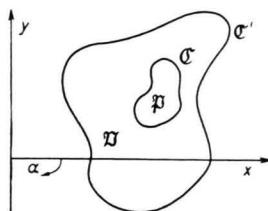


Abb. 2. Allgemeine Torusgeometrie für Plasmaoberfläche und äußeren Leiter.

denen der Plasmaquerschnitt im Gegensatz zu (2) exzentrisch nach außen verlagert ist, wenn also z. B.  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{C}'$  Kreise mit

$$R = 2R' - \sqrt{R'^2 - r'^2 + r^2} \quad (3)$$

darstellen (Abb. 3). Tatsächlich ist man von den Experimenten her an derartigen Fällen stärker interessiert, da die Beobachtungen ergeben haben, daß der Plasmatorus unter dem Einfluß seines eigenen

elektrischen Stromes und damit seines Magnetfeldes bestrebt ist, seinen großen Durchmesser gegenüber dem des Leiters zu vergrößern<sup>5</sup>. Dies entspricht auch der Auffassung, daß der „richtige“ geometrische Ort des im Gleichgewicht befindlichen Plasmatorus dann vorliegt, wenn die Feldlinien des zugehörigen Vakuummagnetfeldes den äußeren Leiter

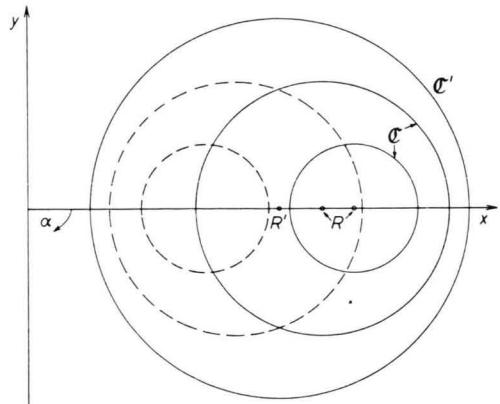


Abb. 3. Exzentrisch nach außen verlagerte Plasmaoberflächen im Vergleich zu Toruskoordinatenflächen (gestrichelt) für denselben äußeren Leiter.

nicht durchsetzen<sup>3</sup>. Allerdings muß das Problem, unter dieser zusätzlichen Randbedingung Gleichgewichtslösungen zu finden, im gegenwärtigen Zeitpunkt als mathematisch ungelöst angesehen werden<sup>6</sup>, so daß wir uns für die Stabilitätsrechnung wie bisher auf den Standpunkt einer a priori fest vorgegebenen Geometrie stellen. Die in dieser Arbeit angegebenen Beispiele zeigen jedoch u. a. sehr deutlich, daß die angenommene Lage des Plasmatorus für das Stabilitätsverhalten von wesentlicher Bedeutung sein kann, im Gegensatz zu einer Vermutung, die in der unter Anm.<sup>3</sup> genannten Arbeit ausgesprochen wird.

Vor der Beschreibung des im wesentlichen auf der Integralgleichungsmethode beruhenden numerischen Verfahrens werden in den folgenden Abschnitten die Grundlagen noch einmal kurz zusammengefaßt. Dabei werden teils bekannte Zusammenhänge unter allgemeineren Voraussetzungen oder mit geringerem Aufwand hergeleitet, teils Beweislücken ausgefüllt, die sich bei dem gegenwärtigen Stand der Untersuchungen in der Literatur finden.

<sup>5</sup> Persönliche Mitteilung von Herrn Dr. S. Witkowski an den Verfasser.  
<sup>6</sup> Es erscheint jedoch nicht ausgeschlossen, daß sich bestimmte Methoden, die bei ähnlichen Problemen der

## 1. Das Eigenwertproblem

Es sei jetzt das vom Plasma erfüllte Gebiet  $\mathfrak{P}$  ein beliebiges zweifach zusammenhängendes Gebiet mit der Oberfläche  $\mathfrak{S}$ , an das sich nach außen ein beliebiges dreifach zusammenhängendes Vakuumgebiet  $\mathfrak{V}$  mit dem äußeren Leiter  $\mathfrak{S}'$  als Berandung anschließt. Eine Gleichgewichtslösung liegt bekanntlich dann vor, wenn zwischen dem Druck  $p$ , der Dichte  $\varrho$ , dem Magnetfeld  $\mathfrak{B}$  in  $\mathfrak{P}$  (einschließlich  $\mathfrak{S}$ ) und dem Magnetfeld  $\mathfrak{B}'$  in  $\mathfrak{V}$  (einschließlich  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S}'$ ) die folgenden Beziehungen bestehen:

$$\operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{B}, \operatorname{rot} \mathfrak{B}] = 0 \quad \text{in } \mathfrak{P}, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{P}, \quad (5)$$

$$p = \text{const } \varrho', \quad \text{const } \geqq 0, \quad \text{in } \mathfrak{P} \quad (6)$$

( $\gamma$  ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen),

$$\frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}'^2 - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 - p = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{S}, \quad (7)$$

$$(\mathfrak{n}, \mathfrak{B}) = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{S}, \quad (8)$$

$$(\mathfrak{n}, \mathfrak{B}') = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{S} \quad (9)$$

( $\mathfrak{n}$  soll stets die äußere Einheitsnormale einer geschlossenen Fläche oder Kurve bedeuten),

$$\operatorname{rot} \mathfrak{B}' = 0 \quad \text{in } \mathfrak{V}, \quad (10)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B}' = 0 \quad \text{in } \mathfrak{V}. \quad (11)$$

Dazu tritt als Integrabilitätsbedingung für (4)

$$\operatorname{rot} [\mathfrak{B}, \operatorname{rot} \mathfrak{B}] = 0 \quad \text{in } \mathfrak{P}. \quad (12)$$

Außerdem hängen  $p$ ,  $\varrho$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  natürlich nicht von der Zeit ab.

Das Stabilitätsproblem einer solchen Gleichgewichtsanordnung gegenüber kleinen Störungen lässt sich, ausgehend von den EULERSchen Bewegungsgleichungen etc., nach der *Methode der kleinen Schwingungen* folgendermaßen als Eigenwertproblem formulieren<sup>1</sup>: Man erklärt einen Definitionsbereich  $\mathfrak{D}$  durch alle ortsabhängigen, komplexwertigen Vektorfelder  $\mathfrak{v}$  mit hinreichenden Regularitäts-eigenschaften in  $\mathfrak{P}$  einschließlich  $\mathfrak{S}$ . Dann definiert man in  $\mathfrak{D}$  den linearen, vektoriellen Differentialoperator zweiter Ordnung („Stabilitätsoperator“)

$$\begin{aligned} T \mathfrak{v} = & -\operatorname{grad}(\gamma p \operatorname{div} \mathfrak{v} + (\mathfrak{v}, \operatorname{grad} p)) \\ & + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} [\mathfrak{v}, \mathfrak{B}], \operatorname{rot} \mathfrak{B}] + \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{B}, \operatorname{rot} \operatorname{rot} [\mathfrak{v}, \mathfrak{B}]] \end{aligned} \quad (13)$$

<sup>7</sup> A. A. BLANK, K. O. FRIEDRICHs u. H. GRAD, Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, N.Y., NYO-6486 [1957].

<sup>8</sup> Die hier auftretenden Normalableitungen auf der Plasma-

sowie den linearen, skalaren Differentialoperator erster Ordnung

$$S \mathfrak{v} = -\gamma p \operatorname{div} \mathfrak{v} - (\mathfrak{v}, \operatorname{grad} p) + \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{B}, \operatorname{rot} [\mathfrak{v}, \mathfrak{B}]). \quad (14)$$

Nach einem Satz von BLANK, FRIEDRICHs und GRAD<sup>7</sup> lässt sich jedem  $\mathfrak{v}$  aus  $\mathfrak{D}$  genau ein Vektorfeld  $\mathfrak{A}$  im Vakuumgebiet  $\mathfrak{V}$  (einschließlich  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S}'$ ) durch das folgende Randwertproblem zuordnen:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{V}, \quad (15)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{V}, \quad (16)$$

$$[\mathfrak{n}, \mathfrak{A}] = -(\mathfrak{n}, \mathfrak{v}) \mathfrak{B}' \quad \text{auf } \mathfrak{S}, \quad (17)$$

$$[\mathfrak{n}, \mathfrak{A}] = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{S}', \quad (18)$$

$$\iint_{\mathfrak{S}} (\mathfrak{n}, \mathfrak{A}) \, df = 0. \quad (19)$$

Es folgt hieraus unmittelbar die Linearität von  $\mathfrak{A}$  hinsichtlich  $\mathfrak{v}$ . Der in  $\mathfrak{D}$  enthaltene Definitionsbereich  $\mathfrak{D}^*$  wird erklärt durch alle  $\mathfrak{v}$  aus  $\mathfrak{D}$ , die zusätzlich der Randbedingung

$$\begin{aligned} S \mathfrak{v} = & (\mathfrak{n}, \mathfrak{v}) \frac{\partial}{\partial \mathfrak{n}} \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}'^2 - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 - p \right) \\ & + \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{B}', \operatorname{rot} \mathfrak{A}) \quad \text{auf } \mathfrak{S} \end{aligned} \quad (20)$$

genügen<sup>8</sup>. Sind dann  $\mathfrak{v}$  und  $\lambda$  Eigenfunktion und Eigenwert des Stabilitätsoperators  $T$  in  $\mathfrak{D}^*$ , genauer, sind die drei partiellen Diff.-Gln.

$$T \mathfrak{v} = \lambda \varrho \mathfrak{v} \quad \text{in } \mathfrak{P} \quad (21)$$

und die Randbedingung (20) erfüllt, so ergeben sich die (reellen) kleinen Störungen der Gleichgewichtslage des Plasmas, d. h. deren im allgemeinen orts- und zeitabhängige Geschwindigkeitsverteilungen, als Real- und Imaginärteil von

$$\mathfrak{v}(x, y, z) \exp(\pm \sqrt{-\lambda} t). \quad (22)$$

Es liegt somit Stabilität oder Instabilität der Gleichgewichtslösung vor, je nachdem (22) für alle Störungen einen für alle  $t \geqq 0$  beschränkten Bewegungsvorgang beschreibt oder nicht.

Real- und Imaginärteil von

$$-\frac{1}{c} \mathfrak{A}(x, y, z) \exp(\pm \sqrt{-\lambda} t)$$

( $c$  ist die Lichtgeschwindigkeit) stellen physikalisch

oberfläche sind als einseitige Ableitungen zu verstehen, und zwar sind  $p$  und  $\mathfrak{B}^2$  von innen und  $\mathfrak{B}'^2$  von außen her jeweils in Richtung der äußeren Normalen von  $\mathfrak{S}$  zu differenzieren.

die den Plasmaschwingungen (22) entsprechenden elektrischen Störfelder im Vakuum dar<sup>9</sup>. Gl. (15) ist eine unmittelbare Folge der MAXWELLSchen Gleichungen ohne Verschiebungs- und Volumenströme im Vakuum, (16) bedeutet die Abwesenheit von elektrischen Raumladungen im Vakuum und (19) besagt, daß die elektrische Gesamtladung im Plasma einschließlich der Plasmaoberfläche bei der Störung des Gleichgewichts erhalten bleibt. Während das elektrische Störfeld auf dem äußeren Leiter  $\mathcal{S}'$  entsprechend (18) senkrecht steht, besitzt es auf der Plasmaoberfläche  $\mathcal{S}$  gewisse Tangentialkomponenten (17).

Es ist für die weiteren Betrachtungen von Nutzen, die komplizierteren der hier aufgetretenen vektoranalytischen Ausdrücke auch in Komponentendarstellung anzugeben. Es genügt dazu, wenn wir uns auf kartesische Koordinaten beschränken, da man von diesen in der üblichen Weise sehr leicht zu beliebigen krummlinigen Koordinaten übergehen kann, indem man die Indizes gegebenenfalls „hinaufzieht“ und die partiellen Ableitungen sämtlich durch kovariante ersetzt. Mit Hilfe der bekannten Vektoridentitäten

$$[\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b}]_i = a_k (b_{k|i} - b_{i|k}), \quad (23)$$

$$\operatorname{rot}_i [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = b_k a_{i|k} - a_k b_{i|k} + a_i b_{k|k} - b_i a_{k|k} \quad (24)$$

(alle Indizes durchlaufen, falls nichts Gegenteiliges gesagt wird, die Zahlen von 1 bis 3, über gleichlautende Indizes wird von 1 bis 3 summiert) ergibt

sich für die Gleichgewichtsbedingung (4)

$$p_{|i} + \frac{1}{4\pi} B_k (B_{k|i} - B_{i|k}) = 0 \quad \text{in } \mathfrak{B}, \quad (25)$$

für deren Integrabilitätsbedingung

$$(B_k B_{i|k})_{|j} - (B_k B_{j|k})_{|i} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{B} \quad (26)$$

und für die Operatoren  $T$  und  $S$  in  $\mathfrak{D}$

$$T_i \mathfrak{v} = -\gamma (p v_{k|k})_{|i} + \frac{1}{4\pi} (V_{kk|i} - V_{ik|k}), \quad (27)$$

$$S \mathfrak{v} = -\gamma p v_{k|k} + \frac{1}{4\pi} V_{kk} \quad (28)$$

mit dem Tensor

$$V_{ik} = B_j B_k v_{i|j} - B_i B_k v_{j|i} - v_k B_j B_{i|j}. \quad (29)$$

Hier erfordert lediglich die Identifizierung von (27) mit (13) eine etwas längere, wenn auch rein elementare Rechnung. Man geht dabei etwa so vor, daß man die rechte Seite von (27) mit durch (29) eliminiertem  $V_{ik}$  von der rechten Seite von (13), worin sämtliche vektoranalytischen Ausdrücke mittels (23) und (24) durch Komponentendarstellungen ersetzt sind, subtrahiert und dann alle auftretenden Produktdifferentiationen nach der Kettenregel ausführt; ferner werde dabei überall die Divergenzfreiheit von  $\mathfrak{B}$  benutzt. Auf diese Weise hebt sich der überwiegende Anteil der Summanden gegenseitig heraus, und es verbleibt ein Rest, der sich leicht in die Form

$$\left( v_k \left( -p_{|k} - \frac{1}{4\pi} B_j B_{j|k} + \frac{1}{4\pi} B_j \dot{B}_{k|j} \right) \right)_{|i}$$

bringen läßt; dieser verschwindet aber als unmittelbare Folge der Gleichgewichtsbedingung (25).

## 2. GREENSCHE FORMELN

Ein sehr wesentliches Hilfsmittel bei der Behandlung des vorliegenden Stabilitätsproblems stellen die sogen. GREENSCHE Formeln dar. Es ist bereits bekannt, daß für den Stabilitätsoperator  $T$  eine ganz analoge zweite GREENSCHE Formel gilt wie für den LAPLACE-Operator  $\Delta$ <sup>10</sup>. Auf diese wird man geführt, wenn man in der letzteren  $\Delta$  durch  $T$  und die Normalableitung auf dem Rande  $\partial/\partial n$  durch  $n \cdot S$  ersetzt und alle auftretenden Produkte als Skalarprodukte interpretiert. Voraussetzung ist dabei allerdings, daß über ein von einer „magnetischen Fläche“ berandetes Gebiet (im folgenden beschränken wir uns auf das Gebiet  $\mathfrak{B}$ ) integriert wird. Wir wollen nun hier einen neuen Zugang zur zweiten GREENSCHE Formel des Stabilitätsoperators angeben, indem wir diese wie beim  $\Delta$ -Operator als eine unmittelbare Folge einer allgemeineren ersten GREENSCHE Formel auffassen.

<sup>9</sup> Zur Gleichgewichtslösung selbst gehört ein identisch verschwindendes elektrisches Feld. Dies folgt für das Plasma unmittelbar aus

$$\mathfrak{E} + (1/c) [\mathfrak{v}, \mathfrak{B}] = 0,$$

während das elektrische Vakuumfeld als Lösung des *homogenen* Systems (15) bis (19) aus Eindeutigkeitsgründen verschwinden muß.

<sup>10</sup> Persönliche Mitteilung von Herrn Prof. Dr. K. JÖRGENS an den Verfasser (unveröffentlicht).

*Erste GREENSCHE Formel. Für  $v$  und  $v'$  aus  $\mathfrak{D}$  gilt*

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathfrak{P}} (v, T v') dg &= \iint_{\mathfrak{S}} (\mathfrak{n}, v) S v' df + \iint_{\mathfrak{P}} \left\{ \gamma p \operatorname{div} v \operatorname{div} v' + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot}[v, \mathfrak{B}], \operatorname{rot}[v', \mathfrak{B}]) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8\pi} (v, \operatorname{rot} \mathfrak{B}, \mathfrak{B} \operatorname{div} v' - \operatorname{rot}[v', \mathfrak{B}]) + \frac{1}{8\pi} (v', \operatorname{rot} \mathfrak{B}, \mathfrak{B} \operatorname{div} v - \operatorname{rot}[v, \mathfrak{B}]) \right\} dg. \end{aligned} \quad (30)$$

Aus Invarianzgründen genügt es, diese Formel in kartesischen Koordinaten zu beweisen. Hierzu zerlegen wir zunächst (29) gemäß

$$V_{ik} = X_{ik} + Y_{ik} \quad (31)$$

in zwei Tensoren  $X_{ik} = B_j B_k v_{i|j} - B_i B_k v_{j|i}$  und  $Y_{ik} = -v_k B_j B_{i|j}$ . (32), (33)

Bedeuten dann  $V'_{ik}$  etc. dieselben Bildungsgesetze bezüglich  $v'_i$  wie  $V_{ik}$  etc. bezüglich  $v_i$ , so folgt aus (27) und (31) mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathfrak{P}} v_i T_i v' dg &= \iint_{\mathfrak{P}} \left\{ -\gamma v_i (p v'_{k|k})_{|i} + \frac{1}{4\pi} v_i (V'_{kk|i} - X'_{ik|k} - Y'_{ik|k}) \right\} dg \\ &= \iint_{\mathfrak{S}} \left\{ -\gamma p n_i v_i v'_{k|k} + \frac{1}{4\pi} (n_i v_i V'_{kk} - v_i n_k X'_{ik}) \right\} df \\ &\quad - \iint_{\mathfrak{P}} \left\{ -\gamma p v_{i|i} v'_{k|k} + \frac{1}{4\pi} (v_{i|i} V'_{kk} - v_{i|k} X'_{ik} + v_i Y'_{ik|k}) \right\} dg. \end{aligned}$$

Da nun wegen (8) und (32)  $n_k X'_{ik} = n_k B_k (B_j v'_{i|j} - B_i v'_{j|i}) = 0$

auf der Plasmaoberfläche gilt, erhalten wir unter Benutzung von (28)

$$\iiint_{\mathfrak{P}} (v, T v') dg = \iint_{\mathfrak{S}} (\mathfrak{n}, v) S v' df + \iint_{\mathfrak{P}} \left( \gamma p \operatorname{div} v \operatorname{div} v' + \frac{Q}{4\pi} \right) dg \quad (34)$$

mit dem Skalar

$$Q = -v_{i|i} V'_{kk} + v_{i|k} X'_{ik} - v_i Y'_{ik|k}.$$

Nach Einsetzen von (29), (32) und (33) folgt

$$\begin{aligned} Q &= -v_{i|i} (B_j B_k v'_{k|j} - B_k B_k v'_{j|i} - v'_k B_j B_{k|j}) + v_{i|k} (B_j B_k v'_{i|j} - B_i B_k v'_{j|i}) + v_i (v'_k B_j B_{i|j})_{|k} \\ &= (B_k v_{i|k} - B_i v_{k|i}) (B_j v'_{i|j} - B_i v'_{j|i}) + (v_i v'_{k|k} + v'_i v_{k|i}) B_j B_{i|j} + v_i v'_k (B_j B_{i|j})_{|k}. \end{aligned}$$

Eliminiert man hier den letzten Summanden auf Grund der Integrabilitätsbedingung (26) durch

$$v_i v'_k (B_j B_{i|j})_{|k} = \frac{1}{2} (v_i v'_k + v'_i v_k) (B_j B_{i|j})_{|k},$$

so wird, wie eine elementare Zwischenrechnung leicht bestätigt,

$$\begin{aligned} Q &= (B_k v_{i|k} - v_k B_{i|k} - B_i v_{k|i}) (B_j v'_{i|j} - v'_j B_{i|j} - B_i v'_{j|i}) + \frac{1}{2} v_k (B_{k|i} - B_{i|k}) (2 B_i v'_{j|i} - B_j v'_{i|j} + v'_j B_{i|j}) \\ &\quad + \frac{1}{2} v'_k (B_{k|i} - B_{i|k}) (2 B_i v_{j|i} - B_j v_{i|j} + v_j B_{i|j}) + \frac{1}{2} B_j ((v_i v'_k + v'_i v_k) B_{i|k})_{|j}. \end{aligned} \quad (35)$$

Wegen (5) und (8) ergibt sich durch partielle Integration

$$\iiint_{\mathfrak{P}} B_j ((v_i v'_k + v'_i v_k) B_{i|k})_{|j} dg = \iint_{\mathfrak{S}} n_j B_j (v_i v'_k + v'_i v_k) B_{i|k} df - \iint_{\mathfrak{P}} B_{j|i} (v_i v'_k + v'_i v_k) B_{i|k} dg = 0.$$

Dies bedeutet aber, daß der letzte Term in (35) beim Einsetzen des erhaltenen Ausdrucks für  $Q$  in (34) keine Rolle spielt, und es folgt auf diese Weise unmittelbar die Behauptung (30), wenn man nur die entsprechenden vektoranalytischen Ausdrücke mittels (23) und (24) unter Berücksichtigung der Divergenzfreiheit von  $\mathfrak{B}$  im Index-Kalkül hinschreibt.

Durch Vertauschung von  $v$  und  $v'$  und anschließende Subtraktion entsteht aus (30) die schon erwähnte *zweite GREENSCHE Formel. Für  $v$  und  $v'$  aus  $\mathfrak{D}$  gilt*

$$\iiint_{\mathfrak{P}} \{ (v, T v') - (v', T v) \} dg = \iint_{\mathfrak{S}} \{ (\mathfrak{n}, v) S v' - (\mathfrak{n}, v') S v \} df. \quad (36)$$

Es ist nun im Hinblick auf das Folgende nützlich, eine ähnliche Aussage über das elektrische Störfeld im Vakuum den bisherigen GREENSchen Formeln an die Seite zu stellen:

*Dritte GREENSche Formel. Einem  $\mathfrak{v}$  aus  $\mathfrak{D}$  werde ein Vektorfeld  $\mathfrak{A}$  mittels (15) bis (19) eindeutig zugeordnet und einem  $\mathfrak{v}'$  aus  $\mathfrak{D}$  genau analog ein Vektorfeld  $\mathfrak{A}'$ . Dann gilt*

$$\iint_{\mathfrak{D}} \{(\mathfrak{n}, \mathfrak{v})(\mathfrak{B}', \text{rot } \mathfrak{A}') - (\mathfrak{n}, \mathfrak{v}')(\mathfrak{B}', \text{rot } \mathfrak{A})\} d\mathfrak{f} = 0. \quad (37)$$

Zum Beweis integrieren wir die aus (15) folgende Identität

$$\text{div}([\mathfrak{A}, \text{rot } \mathfrak{A}'] - [\mathfrak{A}', \text{rot } \mathfrak{A}]) = -(\mathfrak{A}, \text{rot rot } \mathfrak{A}') + (\mathfrak{A}', \text{rot rot } \mathfrak{A}) = 0$$

über  $\mathfrak{D}$  und erhalten auf Grund des GAUSSschen Integralsatzes

$$\iint_{\mathfrak{D}'} \{([\mathfrak{n}, \mathfrak{A}], \text{rot } \mathfrak{A}') - ([\mathfrak{n}, \mathfrak{A}'], \text{rot } \mathfrak{A})\} d\mathfrak{f} - \iint_{\mathfrak{D}} \{([\mathfrak{n}, \mathfrak{A}], \text{rot } \mathfrak{A}') - ([\mathfrak{n}, \mathfrak{A}'], \text{rot } \mathfrak{A})\} d\mathfrak{f} = 0.$$

Einsetzen der Randbedingungen (17) und (18) liefert dann unmittelbar die Behauptung (37).

Die GREENSchen Formeln hängen eng zusammen mit der HERMITEZITÄT des Stabilitätsoperators  $T$  in  $\mathfrak{D}^*$ . Diese Eigenschaft wurde zuerst von BERNSTEIN, FRIEMAN, KRUSKAL und KULSRUD<sup>2</sup> mit aller Strenge, jedoch durch sehr mühsame Rechnungen nachgewiesen. JÖRGENS<sup>10</sup> konnte diesen Beweis später unter alleiniger Berufung auf die zweite und dritte GREENSche Formel ohne jede weitere formale Rechnung folgendermaßen erbringen: Falls  $\mathfrak{v}$  und  $\mathfrak{v}'$  aus  $\mathfrak{D}^*$ , ergibt Einsetzen der Randbedingung (20) in die zweite GREENSche Formel (36) dort eine rechte Gleichungsseite, die unmittelbar auf Grund der dritten GREENSchen Formel (37) verschwindet, d. h. für  $\mathfrak{v}$  und  $\mathfrak{v}'$  aus  $\mathfrak{D}^*$  gilt

$$\iiint_{\mathfrak{D}} \{(\mathfrak{v}, T \mathfrak{v}') - (\mathfrak{v}', T \mathfrak{v})\} dg = 0. \quad (38)$$

Aus der HERMITEZITÄT folgt dann die bekannte Tatsache, daß alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $T$  in  $\mathfrak{D}^*$  reell sind, durch die übliche Schlußweise: Mit  $\mathfrak{v}$  ist auch der zu  $\mathfrak{v}$  komponentenweise konjugiert komplexe Vektor  $\bar{\mathfrak{v}}$  aus  $\mathfrak{D}^*$ , da die Randbedingung (20) linear in  $\mathfrak{v}$  ist mit ausschließlich reellen Koeffizienten. Daher gilt (38) insbesondere für  $\mathfrak{v}' = \bar{\mathfrak{v}}$ . Da ferner  $T \bar{\mathfrak{v}}$  komponentenweise konjugiert komplex zu  $T \mathfrak{v}$  ist (dies folgt wiederum daraus, daß  $T \mathfrak{v}$  linear in  $\mathfrak{v}$  ist und nur reelle Koeffizienten besitzt), ergibt (38)

$$\iiint_{\mathfrak{D}} \{(\mathfrak{v}, \overline{T \mathfrak{v}}) - (\bar{\mathfrak{v}}, T \mathfrak{v})\} dg = 0.$$

Ist nun ferner  $\mathfrak{v}$  eine Eigenfunktion von  $T$  in  $\mathfrak{D}^*$  mit dem Eigenwert  $\lambda$ , so folgt durch Einsetzen von (21)

$$(\bar{\lambda} - \lambda) \iiint_{\mathfrak{D}} \varphi(\mathfrak{v}, \bar{\mathfrak{v}}) dg = 0,$$

der Eigenwert  $\lambda$  muß also gleich seinem konjugiert komplexen Wert  $\bar{\lambda}$  und somit reell sein.

Eine wesentliche Konsequenz dieser Tatsache besteht darin, daß es keine Einschränkung bedeutet, von jetzt an nur noch nach *reellen* Eigenfunktionen von  $T$  in  $\mathfrak{D}^*$  zu suchen, da ja wegen reeller  $\lambda$  mit einer bestimmten komplexen Eigenfunktion  $\mathfrak{v}$  auch Real- und Imaginärteil von  $\mathfrak{v}$  (reelle) Lösungen von (20) und (21) mit dem gleichen Eigenwert darstellen. Zu diesem Zweck erklären wir den Definitionsbereich  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}$  durch alle reellen  $\mathfrak{v}$  aus  $\mathfrak{D}$  und den Definitionsbereich  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}^*$  durch alle reellen  $\mathfrak{v}$  aus  $\mathfrak{D}^*$ . Für jede Eigenfunktion  $\mathfrak{v}$  des Stabilitätsoperators  $T$  in  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}^*$  mit dem dazugehörigen Eigenwert  $\lambda$  lauten dann die kleinen Plasmaschwingungen gemäß (22)

$$\mathfrak{v}(x, y, z) \cos \sqrt{\lambda} t, \quad \mathfrak{v}(x, y, z) \sin \sqrt{\lambda} t, \quad \text{falls } \lambda > 0, \quad (39)$$

$$\text{oder} \quad \mathfrak{v}(x, y, z) \exp(\sqrt{-\lambda} t), \quad \mathfrak{v}(x, y, z) \exp(-\sqrt{-\lambda} t), \quad \text{falls } \lambda \leq 0. \quad (40)$$

Die Stabilitätsfrage reduziert sich damit auf das Vorzeichen der Eigenwerte: Falls alle  $\lambda > 0$ , hat man Stabilität, falls mindestens ein  $\lambda \leq 0$  Instabilität.

Die Bedeutung der GREENSchen Formeln ist jedoch keinesfalls mit der Frage der HERMITEZITÄT des Stabilitätsoperators erschöpft. Wir werden anschließend weitere Anwendungen dieses Hilfsmittels kennenlernen.

### 3. Äquivalenzsatz

Die Äquivalenz des betrachteten Eigenwertproblems mit einem Variationsproblem wurde zuerst von BERNSTEIN et al.<sup>1</sup> formuliert. Der Beweis konnte aber von diesen Autoren nur unter der zusätzlichen Voraussetzung der *Existenz eines vollständigen Systems von Eigenfunktionen für den Stabilitätsoperator T in  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}^*$*  geführt werden. Ein entsprechender Existenzsatz ist indessen bislang nicht gefunden worden, wobei gleich ein solcher aus physikalischen Gründen wohl vermutet werden darf. Im folgenden wird ein Beweis angegeben, der die genannte Voraussetzung vermeidet.

Der Äquivalenzsatz lautet: *Wenn  $v$  aus  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}$  (mit durch (15) bis (19) eindeutig zugeordnetem Vakuumfeld  $\mathfrak{A}$ ) dem Funktional*

$$F \equiv \frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{P}} (v, T v) dg + \frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{S}} (n, v) \left\{ -S v + (n, v) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}'^2 - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 - p \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{B}', \text{rot } \mathfrak{A}) \right\} df \quad (\text{s. Anm. } 11) \quad (41)$$

$$\text{unter der Nebenbedingung} \quad \frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{P}} \iint_{\mathfrak{S}} \varrho v^2 dg = C, \quad C = \text{const} > 0, \quad (42)$$

einen stationären Wert  $F_{\text{stat}}$  erteilt, so ist  $v$  eine (durch (42) normierte) Eigenfunktion des Stabilitätsoperators  $T$  in  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}^*$  und

$$\lambda = F_{\text{stat}}/C \quad (43)$$

der zugehörige Eigenwert. Ist umgekehrt  $v$  eine (durch (42) normierte) Eigenfunktion von  $T$  in  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}^*$  mit dem Eigenwert  $\lambda$ , so wird das Funktional (41) unter der Nebenbedingung (42) für dieses  $v$  bei Variation in  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}$  stationär, und der stationäre Wert selbst ist durch (43) bestimmt.

Zum Beweis berechnen wir zunächst die erste Variation des Funktionalen (41) für alle  $v$  aus  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}$ :

$$\delta F = \frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{P}} \iint_{\mathfrak{S}} \{ (\delta v, T v) + (v, T \delta v) \} dg - \frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{S}} \{ (n, \delta v) S v + (n, v) S \delta v \} df \\ + \iint_{\mathfrak{S}} (n, \delta v) (n, v) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}'^2 - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 - p \right) df + \frac{1}{8\pi} \iint_{\mathfrak{S}} \{ (n, \delta v) (\mathfrak{B}', \text{rot } \mathfrak{A}) + (n, v) (\mathfrak{B}', \text{rot } \delta \mathfrak{A}) \} df.$$

Dabei muß  $\mathfrak{A} + \delta \mathfrak{A}$  in genau analoger Weise aus  $v + \delta v$  hervorgehen, wie  $\mathfrak{A}$  aus  $v$ , nämlich durch die Gln. (15) bis (19), in denen man  $\mathfrak{A}$  durch  $\mathfrak{A} + \delta \mathfrak{A}$  und  $v$  durch  $v + \delta v$  zu ersetzen hat. Dies hat aber unmittelbar zur Folge, daß auch  $\delta \mathfrak{A}$  in derselben Weise aus  $\delta v$  hervorgeht wie  $\mathfrak{A}$  aus  $v$ . Daher dürfen wir die zweite und dritte GREENSche Formel mit  $v' = \delta v$  und  $\mathfrak{A}' = \delta \mathfrak{A}$  anwenden und erhalten

$$\delta F = \iint_{\mathfrak{P}} \iint_{\mathfrak{S}} (\delta v, T v) dg + \iint_{\mathfrak{S}} (n, \delta v) \left\{ -S v + (n, v) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}'^2 - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 - p \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{B}', \text{rot } \mathfrak{A}) \right\} df. \quad (44)$$

Wenn nun  $F$  unter der Nebenbedingung (42) stationär gemacht werden soll, so ist dafür nach der Methode des LAGRANGESchen Multiplikators notwendig und hinreichend

$$\delta \left( F - \frac{\lambda}{2} \iint_{\mathfrak{P}} \iint_{\mathfrak{S}} \varrho v^2 dg \right) = 0 \quad \text{oder ausführlich} \quad \delta F - \lambda \iint_{\mathfrak{P}} \iint_{\mathfrak{S}} \varrho (\delta v, v) dg = 0 \quad (45)$$

mit einer geeigneten Konstanten  $\lambda$ . Nach Elimination von  $\delta F$  mittels (44) folgt (21) als EULERSche Gleichung und (20) als sogen. natürliche Randbedingung<sup>12</sup> auf Grund des Fundamentallemmas der Varia-

<sup>11</sup> Durch Anwendung der ersten GREENSchen Formel mit  $v' = v$  ließen sich hier die in  $T v$  enthaltenen zweiten Ableitungen von  $v$  eliminieren. Diese von BERNSTEIN et al. (s. Anm. 1) vorgenommene Umformung unterlassen wir jedoch, da sie keinen Vorteil für die weiteren Betrachtungen bietet. In der gleichen Arbeit wird das Variationsproblem für eine „Verschiebung“  $\xi \equiv \delta \xi = v \delta t$  statt für  $v$  formuliert, wodurch sich das Funktional  $\delta W = F \delta t^2$  als Energieänderung

der gestörten Gleichgewichtsanordnung anschaulich interpretieren läßt. Demgegenüber hat die Behandlung des Stabilitätsproblems mit Hilfe der Störgeschwindigkeit  $v$  den Vorteil des unmittelbaren Zusammenhangs mit den EULERSchen Bewegungsgleichungen etc. Für die praktische Behandlung des Problems ist dieser Unterschied natürlich völlig unerheblich.

<sup>12</sup> R. COURANT u. D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I. Springer-Verlag, Berlin 1931, S. 179–181.

tionsrechnung. Wenn also (45) erfüllt ist, stellt  $v$  eine Eigenfunktion des Operators  $T$  in  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}^*$  mit zugehörigem Eigenwert  $\lambda$  dar und umgekehrt. Berechnet man schließlich den zu einer (normierten) Eigenfunktion  $v$  gehörigen stationären Wert  $F_{\text{stat}}$  des Funktionalen (41), so folgt durch Benutzung von (20), (21) und (42)

$$F_{\text{stat}} = \frac{\lambda}{2} \iint_{\mathfrak{P}} \varrho v^2 \, dg = \lambda C,$$

d. h. die Zusatzbehauptung (43).

#### 4. Das Stabilitätskriterium

Aus dem Äquivalenzsatz folgt unmittelbar, daß der kleinste Eigenwert  $\lambda_{\text{Min}}$  gemäß (42) und (43) dasselbe Vorzeichen besitzt wie das Minimum  $F_{\text{Min}}$  des Funktionalen (41) für alle  $v$  aus  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}$  mit der Normierungsbedingung (42), vorausgesetzt, daß ein solches Minimum existiert. Wenn das der Fall ist, herrscht also Stabilität, falls  $F_{\text{Min}} > 0$ , anderenfalls Instabilität. Für die praktische Behandlung des Stabilitätsproblems ist dieses naheliegende Kriterium allerdings häufig noch viel zu schwerfällig.

BERNSTEIN, FRIEMAN, KRUSKAL und KULSRUD<sup>1</sup> bemerkten indessen, daß das Variationsproblem auch andere, z. Tl. an spezielle Voraussetzungen gebundene Stabilitätskriterien zu formulieren gestattet, die eine praktische Auswertung in vielen Fällen beträchtlich erleichtern können. Für das Ziel der vorliegenden Arbeit erweist sich das folgende, von den genannten Autoren angegebene Kriterium als besonders geeignet:

Es gelte für alle  $w$  aus  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}$  mit auf  $\mathfrak{S}$  verschwindenden Normalkomponenten

$$\iint_{\mathfrak{P}} (w, T w) \, dg \geq 0; \quad (46)$$

ferner gebe es zu festem, aber beliebig vorgegebenem  $(n, v)$  auf  $\mathfrak{S}$  mindestens eine Lösung  $v$  des Diff.-Gl.-Systems

$$T v = 0 \quad \text{in } \mathfrak{P}, \quad (47)$$

deren Normalkomponente auf  $\mathfrak{S}$  die vorgegebenen Randwerte  $(n, v)$  annimmt. Dann besitzt das Integral

$$\iint_{\mathfrak{S}} (n, v) S v \, df$$

für alle möglichen Lösungen dieses Randwertproblems ein und denselben Wert, stellt also ein eindeu-

tiges Funktional von  $(n, v)$  dar. Insbesondere ist auch

$$F^* \equiv \frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{S}} (n, v) \left\{ -S v + (n, v) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}'^2 - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 - p \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{B}', \text{rot } \mathfrak{A}) \right\} df \quad (48)$$

ein eindeutiges Funktional von  $(n, v)$ , wobei  $\mathfrak{A}$  gemäß (15) bis (19) eindeutig durch  $(n, v)$  bestimmt ist. Falls dann weiter  $F^*$  für alle  $(n, v)$  auf  $\mathfrak{S}$  mit der Nebenbedingung

$$\iint_{\mathfrak{S}} (n, v)^2 \, df = C^*, \quad C^* = \text{const} > 0, \quad (49)$$

ein Minimum  $F_{\text{Min}}^*$  besitzt, so liegt Stabilität vor für  $F_{\text{Min}}^* > 0$  und Instabilität für  $F_{\text{Min}}^* \leq 0$ .

Die Zurückführung dieses Kriteriums auf den Äquivalenzsatz geschieht folgendermaßen<sup>13</sup>: Ist  $v$  aus  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}$  eine Lösung von (47) mit festem, aber beliebig vorgegebenem  $(n, v)$  auf  $\mathfrak{S}$  und besitzt  $w$  aus  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}$  die Normalkomponente

$$(n, w) = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{S}, \quad (50)$$

so folgt aus (46), (47) und (50) mit Hilfe der zweiten GREENSchen Formel

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathfrak{P}} (v + w, T(v + w)) \, dg - \iint_{\mathfrak{S}} (n, v + w) S(v + w) \, df \\ &= \iint_{\mathfrak{P}} \{ (v, T w) + (w, T v) \} \, dg \\ & \quad - \iint_{\mathfrak{S}} \{ (n, v) S v + (n, v) S w \} \, df \\ &= \iint_{\mathfrak{P}} (w, T w) \, dg - \iint_{\mathfrak{S}} (n, v) S v \, df \\ & \geq \iint_{\mathfrak{P}} (v, T v) \, dg - \iint_{\mathfrak{S}} (n, v) S v \, df. \end{aligned}$$

Daher nimmt das Funktional

$$\iint_{\mathfrak{P}} (v, T v) \, dg - \iint_{\mathfrak{S}} (n, v) S v \, df \quad (51)$$

<sup>13</sup> Der hier mitgeteilte Beweis stellt eine auf der Anwendung der zweiten GREENSchen Formel beruhende Vereinfachung

des Beweises von BERNSTEIN et al. (s. Anm.<sup>1</sup>, dort S. 29) dar, ist aber im Prinzip natürlich mit jenem identisch.

bei Variation von  $v$  in  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}$  mit festgehaltenem  $(n, v)$  auf  $\mathfrak{S}$  seinen minimalen Wert sicher dann an, wenn  $v$  eine Lösung von (47) ist. Da sich dieser Schluß für jede Lösung von (47) ziehen läßt, folgt, daß für alle derartigen Lösungen das Funktional (51) ein und denselben minimalen Wert haben muß, nämlich

$$-\int_{\mathfrak{S}} (n, v) S v \, d\mathfrak{f}.$$

Für beliebige  $v$  aus  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}$  mit festem, aber beliebigem  $(n, v)$  gilt daher wegen (41) und (48)

$$F \geqq F^*,$$

wobei  $F^*$  in der beschriebenen Weise als eindeutiges Funktional von  $(n, v)$  aufzufassen ist und das Gleichheitszeichen mindestens einmal angenommen wird, nämlich dann, wenn  $v$  eine Lösung von (47) ist. Das Minimum von  $F$  für alle  $v$  aus  $\mathfrak{D}_{\text{reell}}$  mit der Nebenbedingung (49) ist also gleich dem Minimum von  $F^*$  für alle  $(n, v)$  mit derselben Nebenbedingung, dessen Existenz ja vorausgesetzt wird. Das Minimum von  $F$  unter der Nebenbedingung (49) hat aber dasselbe Vorzeichen wie das Minimum von  $F$  unter der ursprünglichen Nebenbedingung (42), entscheidet also im gleichen Sinne über das Stabilitätsverhalten.

## 5. Vektoranalytische Vereinfachungen

Es handelt sich hier um zwei Vereinfachungen, die sich in den durch (41) und (48) gegebenen Funktionen  $F$  und  $F^*$  ganz allgemein durchführen lassen. Dies bezieht sich einerseits auf die Normalableitung

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}'^2 - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 - p \right) \quad \text{auf } \mathfrak{S},$$

die man allein durch die Werte von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  auf  $\mathfrak{S}$  (insbesondere ohne die Kenntnis von  $p$ ) angeben kann, und zum anderen auf eine direkte Berechnung von  $\text{rot } \mathfrak{A}$  unter Umgehung von  $\mathfrak{A}$  selbst.

Wir beginnen mit dem folgenden Satz: *Die Plasmaoberfläche  $\mathfrak{S}$  sei durch ihren Ortsvektor  $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$  mit den Flächenparametern  $u^1$  und  $u^2$  gegeben. Mit Hilfe der Gleichungen<sup>14</sup>*

$$\mathfrak{B} = B^i \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^i} \quad \text{auf } \mathfrak{S}, \quad (52)$$

$$\mathfrak{B}' = B'^i \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^i} \quad \text{auf } \mathfrak{S} \quad (53)$$

seien ferner die „kontravarianten Komponenten“  $B^i$  und  $B'^i$  der in der Fläche liegenden Vektoren  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  eindeutig festgelegt. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}'^2 - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 - p \right) = \frac{1}{4\pi} b_{ik} (B'^i B'^k - B^i B^k) \quad \text{auf } \mathfrak{S} \quad (54)$$

$$\text{mit} \quad b_{ik} = \left( n, \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^i \partial u^k} \right) \quad (55)$$

als dem „zweiten Fundamentensor“<sup>15</sup> der Flächentheorie.

**Beweis.** Auf Grund der elementaren Vektorformel

$$[\mathfrak{a}, \text{rot } \mathfrak{a}] = \frac{1}{2} \text{grad } \mathfrak{a}^2 - (\mathfrak{a}, \text{grad}) \mathfrak{a} \quad (56)$$

kann man die Gleichgewichtsbedingungen (4) stets in der Form

$$\text{grad} \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 + p \right) = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{B}, \text{grad}) \mathfrak{B} \quad \text{in } \mathfrak{V} \quad (57)$$

hinschreiben. Benutzung von (52) ergibt weiter

$$\begin{aligned} \text{grad} \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 + p \right) &= \frac{1}{4\pi} B^i \left( \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^i}, \text{grad} \right) \mathfrak{B} \\ &= \frac{1}{4\pi} B^i \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial u^i} \quad \text{auf } \mathfrak{S}. \end{aligned}$$

Da jetzt rechts nur noch Differentiationen von  $\mathfrak{B}$  in der Fläche vorkommen, darf  $\mathfrak{B}$  abermals durch (52) eliminiert werden; gleichzeitige skalare Multiplikation mit der Flächennormalen  $n$  ergibt

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 + p \right) = \frac{1}{4\pi} B^i \left( n, \frac{\partial}{\partial u^i} \left( B^k \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^k} \right) \right) \quad \text{auf } \mathfrak{S}$$

und damit infolge der Orthogonalität von Flächennormale und „Basisvektoren“  $\partial \mathfrak{x} / \partial u^i$  sowie unter Benutzung von (55) :

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 + p \right) = \frac{1}{4\pi} b_{ik} B^i B^k \quad \text{auf } \mathfrak{S}. \quad (58)$$

Aus (10) und (56) entsteht

$$\text{grad} \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}'^2 \right) = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{B}', \text{grad}) \mathfrak{B}' \quad \text{in } \mathfrak{V} \quad (59)$$

als Analogon zu (57), und dieselbe Schlußweise wie oben führt auf

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}'^2 \right) = \frac{1}{4\pi} b_{ik} B'^i B'^k \quad \text{auf } \mathfrak{S}. \quad (60)$$

Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus (58) und (60).

<sup>14</sup> Die Indizes durchlaufen in diesem Zusammenhang nur die Zahlen 1 und 2; dasselbe gilt für die Summation über gleichlautende Indizes.

<sup>15</sup> W. BLASCHKE, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I. Springer-Verlag, Berlin 1945, S. 88–89.

Die Zurückführung der Gln. (15) bis (19) auf ein Problem direkt für  $\text{rot } \mathfrak{A}$  hängt eng mit der Frage der Mehrwertigkeit eines skalaren Potentials  $\Phi$  zusammen, das der Gleichung

$$\text{grad } \Phi = \text{rot } \mathfrak{A} \quad \text{in } \mathfrak{V}$$

genügt. Dies ist im wesentlichen Gegenstand einer kürzlich erschienenen Arbeit<sup>16</sup>, der wir das folgende Ergebnis entnehmen:

*Für das durch (15) bis (19) eindeutig bestimmte Vakuumfeld  $\mathfrak{A}$  gilt*

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{E}} (\mathfrak{n}, \mathfrak{v}) (\mathfrak{B}', \text{rot } \mathfrak{A}) \, d\mathfrak{f} &= \iint_{\mathfrak{E}} (\mathfrak{n}, \mathfrak{v}) (\mathfrak{B}', \mathfrak{w}) \, d\mathfrak{f} \\ &+ \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 L_{ik}^{(-1)} \left( \iint_{\mathfrak{E}} (\mathfrak{n}, \mathfrak{v}) (\mathfrak{B}', \mathfrak{Y}_i) \, d\mathfrak{f} \right) \\ &\quad \cdot \left( \iint_{\mathfrak{E}} (\mathfrak{n}, \mathfrak{v}) (\mathfrak{B}', \mathfrak{Y}_k) \, d\mathfrak{f} \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Dabei ist  $\mathfrak{w}$  auf Grund eines Satzes von BLANK, FRIEDRICH und GRAD<sup>7</sup> eindeutig bestimmt durch

$$\text{rot } \mathfrak{w} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{V}, \quad (62)$$

$$\text{div } \mathfrak{w} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{V}, \quad (63)$$

$$(\mathfrak{n}, \mathfrak{w}) = \text{Div}((\mathfrak{n}, \mathfrak{v}) \mathfrak{B}') \quad \text{auf } \mathfrak{S} \quad (\text{s. Anm. } 17), \quad (64)$$

$$(\mathfrak{n}, \mathfrak{w}) = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{S}', \quad (65)$$

$$\int_{\mathfrak{E}_i} (\mathfrak{w}, d\mathfrak{s}) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (66)$$

( $\mathfrak{Q}_1$  bzw.  $\mathfrak{Q}_2$  sind geschlossene Kurven in  $\mathfrak{V}$ , die das Plasmagebiet  $\mathfrak{P}$  genau einmal meridional bzw. toroidal umlaufen und so orientiert sind, daß der Durchlaufungssinn für  $\mathfrak{Q}_2$  aus dem für  $\mathfrak{Q}_1$  in positivem Windungssinn hervorgeht<sup>18</sup>). Ferner sind die  $\mathfrak{Y}_i$ ,  $i = 1, 2$ , ebenfalls auf Grund entsprechender Existenzsätze<sup>7</sup> eindeutig festgelegt durch

$$\text{rot } \mathfrak{Y}_i = 0 \quad \text{in } \mathfrak{V}, \quad (67)$$

$$\text{div } \mathfrak{Y}_i = 0 \quad \text{in } \mathfrak{V}, \quad (68)$$

$$(\mathfrak{n}, \mathfrak{Y}_i) = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{S}, \quad (69)$$

$$(\mathfrak{n}, \mathfrak{Y}_i) = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{S}', \quad (70)$$

$$\int_{\mathfrak{E}_i} (\mathfrak{Y}_k, d\mathfrak{s}) = \delta_{ik}, \quad (71)$$

und schließlich bedeutet  $L_{ik}^{(-1)}$  die Reziproke der „Induktionsmatrix“<sup>19</sup>

$$L_{ik} = \iint_{\mathfrak{P}} (\mathfrak{Y}_i, \mathfrak{Y}_k) \, dg, \quad i, k = 1, 2. \quad (72)$$

<sup>16</sup> R. LÜST u. E. MARTENSEN, Z. Naturforschg. **15a**, 706 [1960].

<sup>17</sup> Div bedeutet die in der Fläche genommene Divergenz eines Vektors, der in Richtung der Tangentialebene der Fläche fallen muß.

Wie man sogleich erkennt, bereitet es weniger Schwierigkeiten, das System (62) bis (66) für  $\mathfrak{w}$  als (15) bis (19) für  $\mathfrak{A}$  aufzulösen. Das System (67) bis (71) und die Induktionsmatrix (72) werden für das Endergebnis dieser Arbeit im übrigen keine Rolle spielen.

## 6. Stromfreie Magnetfelder

Wir spezialisieren die Betrachtung jetzt auf stromfreie Magnetfelder, d. h. die zugrunde liegende Gleichgewichtslösung besitzt keine Volumenströme:

$$\mathfrak{j} \equiv \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathfrak{B} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{P}. \quad (73)$$

Im Zusammenhang mit (4) folgt unmittelbar

$$p = \text{const} \geqq 0 \quad \text{in } \mathfrak{P}. \quad (74)$$

Für die auf der Plasmaoberfläche im allgemeinen anwesenden Oberflächenströme gilt

$$\mathfrak{j}^* \equiv \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{n}, \mathfrak{B}' - \mathfrak{B}] \quad \text{auf } \mathfrak{S}. \quad (75)$$

Damit ist nicht nur  $\mathfrak{B}'$ , sondern auch  $\mathfrak{B}$  ein harmonisches, d. h. wirbel- und quellenfreies Vektorfeld. Wegen der Randbedingung (8) ist ein derartiges  $\mathfrak{B}$  nach einem Satz von BLANK, FRIEDRICH und GRAD<sup>7</sup> eindeutig in  $\mathfrak{P}$  festgelegt, wenn noch der Wert des vom Wege unabhängigen Umlaufintegrals

$$t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{E}} (\mathfrak{B}, d\mathfrak{s}) \quad (76)$$

vorgeschrieben wird ( $\mathfrak{E}$  ist ein geschlossener Integrationsweg, der das Plasma genau einmal im festgelegten Sinne<sup>18</sup> toroidal durchläuft). Das Magnetfeld kann auch dargestellt werden als

$$\mathfrak{B} = 2\pi t \mathfrak{Y} \quad \text{in } \mathfrak{P}, \quad (77)$$

wobei  $\mathfrak{Y}$  durch die Bedingungen

$$\text{rot } \mathfrak{Y} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{P}, \quad (78)$$

$$\text{div } \mathfrak{Y} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{P}, \quad (79)$$

$$(\mathfrak{n}, \mathfrak{Y}) = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{S}, \quad (80)$$

$$\int_{\mathfrak{E}} (\mathfrak{Y}, d\mathfrak{s}) = 1 \quad (81)$$

ebenfalls nach dem genannten Satz eindeutig be-

<sup>18</sup> Den toroidalen Durchlaufungssinn denke man sich von vornherein in geeigneter Weise festgelegt.

<sup>19</sup> Die hier gegebene Definition (72) der Induktionsmatrix unterscheidet sich von der früheren (s. Anm. <sup>16</sup>) um einen Faktor  $4\pi$ .

stimmt ist, und zwar allein in Abhängigkeit von der Geometrie der Anordnung.

Für die Anwendung des Stabilitätskriteriums zeigt sich, daß die Voraussetzung (46) für alle  $v$  aus  $\mathcal{D}_{\text{reell}}$  mit verschwindenden  $(n, v)$  auf  $\mathfrak{S}$  im Falle stromfreier Magnetfelder automatisch erfüllt ist. Dies folgt unmittelbar aus der ersten GREENSchen Formel, die mit  $v' = v$  aus  $\mathcal{D}_{\text{reell}}$  und (73) die spezielle Gestalt

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{P}} (v, T v) dg &= \iint_{\mathfrak{S}} (n, v) S v df \quad (82) \\ &+ \iint_{\mathfrak{P}} \left\{ \gamma p (\operatorname{div} v)^2 + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot}[v, \mathfrak{B}])^2 \right\} dg \end{aligned}$$

annimmt, in der wegen  $\gamma p \geq 0$  das rechts stehende Volumenintegral stets nichtnegativ ist.

Die im Stabilitätskriterium enthaltene Aussage, daß

$$\iint_{\mathfrak{S}} (n, v) S v df$$

für alle Lösungen  $v$  von (47) mit vorgegebenem  $(n, v)$  auf  $\mathfrak{S}$  unverändert bleibt, läßt sich im Falle stromfreier Magnetfelder dahingehend erheblich verschärfen, daß alle derartigen Lösungen  $v$  zu eindeutigen Funktionen  $\sqrt{p} \operatorname{div} v$ ,  $\operatorname{rot}[v, \mathfrak{B}]$  und  $S v$  in  $\mathfrak{P}$  (einschließlich  $\mathfrak{S}$ ) führen. Zum Beweis nehmen wir an, es seien  $v_1$  und  $v_2$  Lösungen von (47) mit den gleichen Normalkomponenten auf  $\mathfrak{S}$ . Dann ist

$$v = v_1 - v_2$$

eine Lösung von (47) mit auf  $\mathfrak{S}$  verschwindender Normalkomponente, so daß die erste GREENSche Formel in der speziellen Fassung (82)

$$\iint_{\mathfrak{P}} \left\{ \gamma p (\operatorname{div} v)^2 + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot}[v, \mathfrak{B}])^2 \right\} dg = 0$$

liefert. Da der Integrand wegen  $\gamma \geq 1$ ,  $p \geq 0$  nur nichtnegativer Werte fähig ist, folgt hieraus

$$\sqrt{p} \operatorname{div} v = \sqrt{p} \operatorname{div} v_1 - \sqrt{p} \operatorname{div} v_2 = 0,$$

$$\operatorname{rot}[v, \mathfrak{B}] = \operatorname{rot}[v_1, \mathfrak{B}] - \operatorname{rot}[v_2, \mathfrak{B}] = 0$$

und damit wegen (14) und (74)

$$S v = S v_1 - S v_2 = 0.$$

Man kann hieraus jedoch nicht den Schluß ziehen, daß das betrachtete Randwertproblem für das Diff.-Gl.-System (47) höchstens eine Lösung  $v$  hätte. Vielmehr ist ganz allgemein das Gegenteil der Fall. Da nämlich (77)

$$[\mathfrak{Y}, \mathfrak{B}] = 0 \quad \text{in } \mathfrak{P}$$

ergibt, folgt aus (13), (74) und (79)

$$T \mathfrak{Y} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{P}.$$

Mit  $v_1$  ist also auch

$$v_2 = v_1 + \text{const } \mathfrak{Y}$$

eine Lösung von (47), die insbesondere wegen (80) dieselbe Normalkomponente auf der Berandung  $\mathfrak{S}$  besitzt wie  $v_1$ .

## 7. Die Gleichgewichtslösung

Wir kommen jetzt auf die einleitend beschriebenen allgemeinen torusartigen Berandungen zurück, die von beliebigen, in der rechten  $(x, y)$ -Halbebene gelegenen Kurven  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{C}'$  erzeugt werden (Abb. 2). Diese Kurven mögen die (hinreichend oft stetig differenzierbaren) Parameterdarstellungen<sup>20</sup>

$$\mathfrak{C}: x(\varphi) > 0, \quad y(\varphi), \quad [\dot{x}(\varphi)]^2 + [\dot{y}(\varphi)]^2 \neq 0,$$

$$\mathfrak{C}': x'(\varphi) > 0, \quad y'(\varphi), \quad [\dot{x}'(\varphi)]^2 + [\dot{y}'(\varphi)]^2 \neq 0,$$

besitzen und jeweils mit wachsendem  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  genau einmal im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden. Der meridionale Durchlaufungssinn des Vakuumgebietes entspreche wachsendem  $\varphi$ , der toroidale sowohl im Plasma als auch im Vakuum wachsendem Azimut  $\alpha$ .

Aus (77) bis (81) ergibt sich

$$\mathfrak{Y} = (1/(2\pi x)) \mathfrak{e}_\alpha \quad \text{in } \mathfrak{P}, \quad (83)$$

entsprechend aus (67) bis (71)

$$\mathfrak{Y}_2 = (1/(2\pi x)) \mathfrak{e}_\alpha \quad \text{in } \mathfrak{B}, \quad (84)$$

während  $\mathfrak{Y}_1$  im allgemeinen nicht in geschlossener Form angegeben werden kann ( $\mathfrak{e}_\alpha$  ist der gemäß wachsendem  $\alpha$  orientierte Einheitsvektor in azimutaler Richtung). Damit folgt aus (77) und (83)

$$\mathfrak{B} = (t/x) \mathfrak{e}_\alpha \quad \text{in } \mathfrak{P}, \quad (85)$$

wobei  $t$  durch das Umlaufintegral (76) definiert ist.

Um die Verhältnisse auf der Plasmaoberfläche  $\mathfrak{S}$  genau zu beherrschen, beschreiben wir  $\mathfrak{S}$  durch ihren Ortsvektor ( $u^1 = \varphi$  und  $u^2 = \alpha$  gesetzt):

$$\mathfrak{x}(\varphi, \alpha) = (x \cos \alpha, y, x \sin \alpha). \quad (86)$$

<sup>20</sup> Übergesetzte Punkte sollen im folgenden die Ableitungen nach dem Kurvenparameter bedeuten, während Akzente wie bisher lediglich zur Kennzeichnung benutzt werden.

Es folgen hieraus die Basisvektoren

$$\mathbf{r}_\varphi \equiv \partial \mathbf{r} / \partial \varphi = (\dot{x} \cos \alpha, \dot{y}, \dot{x} \sin \alpha), \quad (87)$$

$$\mathbf{r}_\alpha \equiv \partial \mathbf{r} / \partial \alpha = (-x \sin \alpha, 0, x \cos \alpha) \quad (88)$$

und somit das Linienelement auf  $\mathfrak{S}$

$$ds^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) d\varphi^2 + x^2 d\alpha^2. \quad (89)$$

Der Normaleneinheitsvektor auf  $\mathfrak{S}$  ergibt sich bei Beachtung der Orientierung der Flächenparameter  $\varphi$  und  $\alpha$  aus der allgemeinen Darstellung

$$\mathbf{n} = [\mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_\alpha] / [\mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_\alpha] \quad |$$

$$\text{zu } \mathbf{n} = (\dot{y} \cos \alpha, -\dot{x}, \dot{y} \sin \alpha) / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \quad (90)$$

Schließlich berechnen sich die Komponenten des zweiten Fundamentaltensors (55) mit Hilfe von (87), (88) und (90) zu

$$\begin{aligned} b_{11} &= -(\dot{x} \dot{y} - \dot{y} \dot{x}) / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \\ b_{12} &= b_{21} = 0, \quad b_{22} = -x \dot{y} / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \end{aligned} \quad (91)$$

Mit Hilfe der Basisvektoren (87) und (88) lautet das Plasmamagnetfeld (85)

$$\mathfrak{B} = \frac{t}{x} \frac{\mathbf{r}_\alpha}{|\mathbf{r}_\alpha|} \quad \text{auf } \mathfrak{S}. \quad (92)$$

Entsprechend gilt für das Vakuumfeld

$$\mathfrak{B}' = B'_\varphi \frac{\mathbf{r}_\varphi}{|\mathbf{r}_\varphi|} + \frac{t'}{x} \frac{\mathbf{r}_\alpha}{|\mathbf{r}_\alpha|} \quad \text{auf } \mathfrak{S} \quad (93)$$

mit dem zu (76) analogen (wegunabhängigen) Umlaufintegral

$$t' = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{S}} (\mathfrak{B}', d\mathfrak{s}). \quad (94)$$

Die Gleichgewichtsbedingung (7) ergibt nach Einsetzen von (92) und (93)

$$B'_\varphi = (8\pi p + (t^2 - t'^2)/x^2)^{1/2} \quad \text{auf } \mathfrak{S}. \quad (95)$$

Für den azimutalen Gesamtoberflächenstrom

$$I = \int_{\mathfrak{S}} (\mathbf{r}_\alpha / |\mathbf{r}_\alpha|, \mathbf{j}^*) ds$$

<sup>21</sup> Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf dabei im folgenden stillschweigend  $t \geq 0, t' \geq 0, I > 0$  vorausgesetzt werden, da in die Stabilitätsuntersuchung letztlich nur die Quadrate dieser Größen Eingang finden. Insbesondere ist  $I > 0$  gleichbedeutend damit, daß die Wurzel in (95) und (96) stets positiv zu nehmen ist.

<sup>22</sup> Ist  $\mathfrak{S}$  speziell ein Kreistorus, so lautet die Parameterdarstellung für  $\mathfrak{S}$

$$x(\varphi) = R + r \cos \varphi, \quad y(\varphi) = r \sin \varphi, \quad r < R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

folgt aus (75), (92), (93) und (95)

$$I = \frac{c}{4\pi} \int_{\mathfrak{S}} B'_\varphi ds = \frac{c}{4\pi} \int_{\mathfrak{S}} (8\pi p + (t^2 - t'^2)/x^2)^{1/2} ds. \quad (96)$$

Da  $t, t'$  und  $I$  naturgemäß die physikalischen Parameter des Problems sind, hat man (96) als Bestimmungsgleichung für  $p$  aufzufassen. Die Forderung, daß sich dabei nichtnegative, reelle Werte für  $p$  ergeben müssen, führt zu gewissen Beschränkungen für  $t, t'$  und  $I$ <sup>21</sup>. Aus Monotoniegründen kann (96) höchstens eine reelle Lösung  $p$  haben. Diese wird dann und nur dann negativ, wenn  $t$  (für feste  $t'$  und  $I$ ) einen maximalen Wert  $t_{\text{Max}}$  überschreitet. Diesen erhält man aus (96), indem man dort  $p=0, t=t_{\text{Max}}$  setzt, zu

$$t_{\text{Max}} = \sqrt{t'^2 + 4I^2/(a^2 c^2)}; \quad (97)$$

die dabei auftretende dimensionslose Konstante

$$a = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{S}} \frac{ds}{x} \quad (98)$$

nennen wir das „verallgemeinerte Aspektverhältnis“ der torusartigen Plasmaoberfläche  $\mathfrak{S}$ <sup>22</sup>.

Eine ähnliche Überlegung führt (bei festen  $t$  und  $I$ ) zu einer oberen Grenze  $t'_{\text{Max}}$  für  $t'$ . Damit der Radikand in (96) im Falle  $t' \geq t$  nirgends negativ werden kann, muß offenbar

$$p \geq (t'^2 - t^2) / (8\pi x_{\text{Min}}^2)$$

sein, wobei  $x_{\text{Min}}$  der kürzeste Abstand der Plasmaoberfläche von der Symmetrieachse ist. Da die rechte Seite von (96) monoton mit  $p$  wächst, kann es eine reelle Lösung  $p$  daher nur geben, wenn die Ungleichung

$$I \geq \frac{c}{4\pi} \int_{\mathfrak{S}} \left( \frac{t'^2 - t^2}{x_{\text{Min}}^2} + \frac{t^2 - t'^2}{x^2} \right)^{1/2} ds$$

erfüllt ist. Dies impliziert aber eine obere Grenze  $t'_{\text{Max}}$  für  $t'$ , die im Falle der Gültigkeit des Gleichheitszeichens erreicht wird und somit der Bedingung

$$I = \frac{c}{4\pi} \int_{\mathfrak{S}} \left( \frac{t'_{\text{Max}}^2 - t^2}{x_{\text{Min}}^2} + \frac{t^2 - t'_{\text{Max}}^2}{x^2} \right)^{1/2} ds$$

dann ergibt (98)

$$a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r d\varphi}{R + r \cos \varphi} = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

in Übereinstimmung mit der ursprünglichen Definition des Aspektverhältnisses (1) bei einem Kreistorus.

genügt; aufgelöst:

$$t'_{\text{Max}} = \sqrt{t^2 + 4I^2 / (a^{*2} c^2)} \quad (99)$$

mit

$$a^* = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}} \left( \frac{1}{x_{\text{Min}}^2} - \frac{1}{x^2} \right)^{1/2} ds \quad (\text{s. Anm. 23}). \quad (100)$$

Nach Wahl einer geeigneten Länge  $l > 0$  führen wir die dimensionslosen Konstanten

$$P = 2\pi a^2 c^2 l^2 p / I^2, \quad (101)$$

$$T = a c t / (2I), \quad (102)$$

$$T' = a c t' / (2I) \quad (103)$$

und die dimensionslose Funktion

$$G = a c x B'_\varphi / (2I) \quad \text{auf } \mathfrak{S} \quad (104)$$

ein. Dadurch gelingt es, die Zahl der anfänglichen drei physikalischen Parameter  $t$ ,  $t'$  und  $I$  auf zwei, nämlich  $T$  und  $T'$ , zu reduzieren. Dabei geht die Gleichgewichtsbedingung (95) über in

$$G = ((x^2/l^2) P + T^2 - T'^2)^{1/2}. \quad (105)$$

und  $P$  bleibt wegen (96), (104) und (105) aus

$$\frac{1}{2\pi a} \int_{\mathfrak{C}} \left( \frac{P}{l^2} + \frac{T^2 - T'^2}{x^2} \right)^{1/2} ds = 1 \quad (106)$$

zu bestimmen. Die Grenzen (97) und (99) transformieren sich in

$$T_{\text{Max}} = \sqrt{T'^2 + 1}, \quad (107)$$

$$T'_{\text{Max}} = \sqrt{T^2 + (a/a^*)^2} \quad (108)$$

und stellen in einem  $(T, T')$ -Diagramm zwei Viertelhyperbeln  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{H}'$  dar, die die verbotenen  $(T, T')$ -Kombinationen umschließen (Abb. 4). Die beiden Hyperbeln gemeinsame Asymptote  $T = T'$  zerteilt den zulässigen  $(T, T')$ -Definitionsreich in die beiden Teillbereiche  $T \geq T'$  und  $T < T'$ , von denen der erste und eigentlich physikalisch interessante nicht von der Torusgeometrie abhängt, da  $\mathfrak{H}$  immer dieselbe Hyperbel beschreibt; demgegenüber ist  $\mathfrak{H}'$  wegen der Abhängigkeit von  $a$  und  $a^*$  von Fall zu Fall verschieden. In Abb. 4 eingetragen sind ferner die Parameterwerte der in Abschnitt 14 dieser Arbeit behandelten Beispiele.

Die praktische Auflösung der Bestimmungsgleichung (106) für  $P$  geschieht am besten nach dem

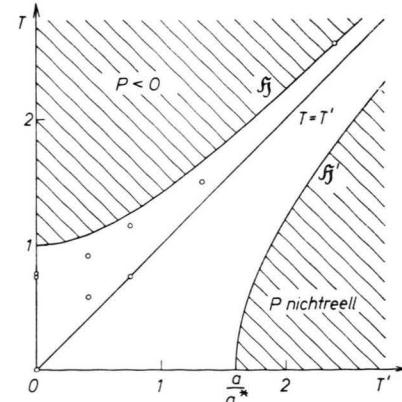


Abb. 4. Definitionsbereich der physikalischen Parameter  $T$  und  $T'$ .

NEWTONSchen Verfahren (aus Monotoniegründen ist sofort klar, daß es genau eine nichtnegative reelle Lösung  $P$  gibt, sofern  $T$  und  $T'$  im obigen Sinne zulässige Werte sind). Mit einer Ausgangsnäherung

$$P_0 = (l^2/\bar{x}^2) (1 - T^2 + T'^2) \geq 0, \quad (109)$$

wo  $\bar{x} > 0$  ein (sehr grober) Mittelwert für  $x$  über  $\mathfrak{C}$  ist, bekommt man daher das Iterationsverfahren

$$P_{z+1} = P_z - 2 \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{C}} \left( \frac{P_z}{l^2} + \frac{T^2 - T'^2}{x^2} \right)^{1/2} ds - a}{\frac{1}{2\pi l^2} \int_{\mathfrak{C}} \left( \frac{P_z}{l^2} + \frac{T^2 - T'^2}{x^2} \right)^{-1/2} ds}, \quad z = 0, 1, 2, \dots \quad (110)$$

In der Praxis zeigte sich eine außerordentlich schnelle Konvergenz dieses Verfahrens: Nach 3 bis 5 Schritten wurde durchweg eine Übereinstimmung von 9 bis 10 wesentlichen Dezimalstellen beobachtet<sup>24</sup>.

Die kontravarianten Komponenten von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  ergeben sich gemäß (52), (53), (87), (88), (92) und (93) zu

$$B^1 = 0, \quad B^2 = t/x^2 \quad \text{auf } \mathfrak{S}, \quad (111)$$

$$B'^1 = B'_\varphi / \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad B'^2 = t'/x^2 \quad \text{auf } \mathfrak{S}. \quad (112)$$

Zusammen mit (54) und (91) bekommen wir daher

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}'^2 - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 - p \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{t^2 - t'^2}{x^3} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - B'^2 \frac{\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}} \right) \text{auf } \mathfrak{S}. \end{aligned} \quad (113)$$

Rechteckformel numerisch ausgewertet. Diese im folgenden öfter benutzte Formel besitzt im Falle periodischer Integranden bekanntlich die sehr hohe Genauigkeit der GAUSSschen Quadraturformel.

<sup>23</sup> Bei einer numerischen Auswertung dieses Integrals sollte nicht übersehen werden, daß der Integrand an Stellen mit  $x = x_{\text{Min}}$  im allgemeinen nicht stetig differenzierbar ist.

<sup>24</sup> Dabei wurden die in (110) auftretenden Quadraturen nach Transformation auf den Kurvenparameter  $\varphi$  mit Hilfe der

### 8. Das Randwertproblem für $T v = 0$

Die Tatsache, daß  $S v$  unter der Voraussetzung stromfreier Magnetfelder für jedes  $v$ , das den Diff.-Gln. (47) zu vorgegebener Normalkomponente  $(n, v)$  auf  $\mathfrak{S}$  genügt, eine eindeutige Funktion in  $\mathfrak{P}$  darstellt, legt den Versuch nahe, unter Umgehung von  $v$  direkt  $S v$  zu auf  $\mathfrak{S}$  vorgegebenem  $(n, v)$  zu berechnen. Hierzu ist es zweckmäßig und üblich,  $(n, v)$  in eine FOURIER-Reihe

$$(n, v) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m(\varphi) \cos m \alpha \quad (114)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} W_m(\varphi) \sin m \alpha \quad \text{auf } \mathfrak{S}$$

zu entwickeln und das Randwertproblem gliedweise, d. h. für jeden FOURIER-Summanden einzeln in Angriff zu nehmen. Im Falle ihrer Existenz sind dann die erhaltenen partikulären Lösungen zu superponieren<sup>25</sup>. Es hat sich nun gezeigt, daß die Fälle  $m=0$  und  $m>0$  (azimutalunabhängige bzw. azimutalabhängige Störung der Plasmaoberfläche) ihrer Natur nach voneinander völlig verschieden sind. Was das Randwertproblem anbetrifft, so konnte im Falle  $m=0$  sowohl die (laut Stabilitätskriterium geforderte) Existenz mindestens einer Lösung  $v$  nachgewiesen als auch ein Verfahren angegeben werden, welches direkt  $S v$  auf  $\mathfrak{S}$  aus  $(n, v)$  auf  $\mathfrak{S}$  zu berechnen gestattet<sup>26</sup>. Im Falle  $m>0$  wurde wohl ein direkter Zusammenhang zwischen  $S v$  und  $(n, v)$  bemerkt, wonach jedem  $(n, v)$  auf  $\mathfrak{S}$  ein  $S v$  in  $\mathfrak{P}$  (einschließlich  $\mathfrak{S}$ ) zugeordnet wird<sup>3</sup>, doch geschieht dies unter der Voraussetzung der Existenz einer Lösung  $v$  des Randwertproblems; die Existenz selbst wurde dabei nicht nachgewiesen. Wir füllen hier diese Lücke aus durch Angabe eines geschlossenen Ausdrucks für  $v$ , von dem sich alle geforderten Eigenschaften ablesen lassen.

Wie leicht einzusehen ist, bedeutet es keine Einschränkung, wenn wir im Falle  $m>0$  nur die Cosinusglieder aus (114) herausgreifen und daher

$$(n, v) = V(\varphi) \cos m \alpha \quad \text{auf } \mathfrak{S} \quad (115)$$

mit einer festen natürlichen Zahl  $m$  als gegeben ansehen (die Sinusglieder lassen sich völlig analog miterledigen). Dann hat das NEUMANNsche Problem

<sup>25</sup> Auf die Frage der Konvergenz der so entstehenden Reihe wird in dieser Arbeit nicht eingegangen.

<sup>26</sup> R. Lüst, E. MARTENSEN u. B. R. SUYDAM, Phys. Fluids 5, 439 [1962].

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathfrak{P}, \quad (116)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = - \frac{m^2}{4 \pi \sigma} (n, v) \quad \text{auf } \mathfrak{S}, \quad (117)$$

$$\iint_{\mathfrak{S}} u \, df = 0 \quad (118)$$

mit  $\sigma > 0$  als dem Quadrat des Abstandes zur Symmetrieachse nach bekannten Sätzen der Analysis genau eine einwertige Lösung  $u$  in  $\mathfrak{P}$ , da nämlich die Integralitätsbedingung

$$\iint_{\mathfrak{S}} \frac{1}{\sigma} (n, v) \, df = 0 \quad (119)$$

wegen (115) stets automatisch erfüllt ist.

Von dieser Lösung  $u$  weisen wir zunächst die Darstellbarkeit in der Form

$$u = U(x, y) \cos m \alpha \quad \text{in } \mathfrak{P} \quad (120)$$

nach, wobei  $x, y, \alpha$  Zylinderkoordinaten sind (Abb. 2). Hierzu entwickeln wir  $u$  in eine FOURIER-Reihe

$$u = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu}(x, y) \cos \mu \alpha + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_{\mu}(x, y) \sin \mu \alpha \quad \text{in } \mathfrak{P}. \quad (121)$$

Einsetzen in (116) liefert<sup>27</sup>

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial a_{\mu}}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 a_{\mu}}{\partial y^2} - \frac{\mu^2}{x^2} a_{\mu} \right\} \cos \mu \alpha$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial b_{\mu}}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 b_{\mu}}{\partial y^2} - \frac{\mu^2}{x^2} b_{\mu} \right\} \sin \mu \alpha = 0.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn die FOURIER-Koeffizienten, d. h. die geschweiften Klammern, für sich identisch in dem von der Erzeugenden  $\mathfrak{C}$  umschlossenen Gebiet  $\mathfrak{G}$  der  $(x, y)$ -Ebene verschwinden (Abb. 2). Dazu kommen die aus (115), (117) und (121) folgenden Randbedingungen

$$\frac{\partial a_{\mu}}{\partial n} = 0, \quad \mu \geq 0, \quad \mu \neq m \quad \text{auf } \mathfrak{C},$$

$$\frac{\partial b_{\mu}}{\partial n} = 0, \quad \mu > 0 \quad \text{auf } \mathfrak{C}.$$

Integration der Bedingungsgleichungen für  $a_{\mu}$  ergibt sodann

$$\iint_{\mathfrak{G}} x a_{\mu} \left\{ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial a_{\mu}}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 a_{\mu}}{\partial y^2} - \frac{\mu^2}{x^2} a_{\mu} \right\} df$$

$$= \int_{\mathfrak{C}} x a_{\mu} \left\{ n_x \frac{\partial a_{\mu}}{\partial x} + n_y \frac{\partial a_{\mu}}{\partial y} \right\} ds$$

$$- \iint_{\mathfrak{G}} x \left\{ \left( \frac{\partial a_{\mu}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_{\mu}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu^2}{x^2} a_{\mu}^2 \right\} df = 0.$$

<sup>27</sup> Die gliedweise Anwendung des LAPLACE-Operators sei als erlaubt vorausgesetzt.

Da das auftretende Randintegral über  $\mathfrak{C}$  wegen

$$n_x \frac{\partial a_\mu}{\partial x} + n_y \frac{\partial a_\mu}{\partial y} = \frac{\partial a_\mu}{\partial n} = 0, \\ \mu \geq 0, \quad \mu \neq m, \quad \text{auf } \mathfrak{C}$$

mit Ausnahme des Falles  $\mu = m$  verschwindet, folgt

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial a_\mu}{\partial y} = 0, \quad \mu a_\mu = 0, \\ \mu \geq 0, \quad \mu \neq m, \quad \text{in } \mathfrak{G},$$

insbesondere also

$$a_\mu = 0, \quad \mu > 0, \quad \mu \neq m, \quad \text{in } \mathfrak{G}.$$

Falls  $\mu = 0$ , kann man zunächst nur auf

$$a_0 = \text{const} \quad \text{in } \mathfrak{G}$$

schließen; diese Konstante muß aber auf Grund der aus (118) und (121) folgenden Bedingung

$$\iint_{\mathfrak{G}} a_0(x, y) \, d\mathfrak{f} = 2\pi \int_{\mathfrak{C}} a_0(x, y) x \, ds = 0$$

verschwinden. Entsprechend folgt man

$$b_\mu = 0, \quad \mu > 0, \quad \text{in } \mathfrak{G},$$

so daß  $u$  damit die behauptete Gestalt (120) erhält.

Nunmehr zeigen wir, daß

$$\mathfrak{v} = -(4\pi\sigma/m^2) \text{ grad } u \quad (122) \\ - (16\pi^3\sigma^2/m^4) \mathfrak{Y}(\mathfrak{Y}, \text{ grad}(\text{ grad } \sigma, \text{ grad } u)) \text{ in } \mathfrak{P}$$

eine Lösung des Randwertproblems ist, wobei  $\mathfrak{Y}$  durch (78) bis (81) bzw. durch (83) definiert ist. Zunächst ist wegen (80) und (117) sofort klar, daß die Normalkomponente von (122) auf  $\mathfrak{C}$  mit dem vorgegebenen Wert ( $\mathfrak{n}, \mathfrak{v}$ ) übereinstimmt. Da nun in Zylinderkoordinaten  $x, y, \alpha$

$$\sigma = x^2 \quad (123)$$

gilt und daher nach (83) mit  $\mathfrak{Y}$  auch  $\sigma^2 \mathfrak{Y}$  divergenzfrei ist, folgt aus (116) und (122)

$$\text{div } \mathfrak{v} = -(4\pi\chi/m^2) \quad (124) \\ - (16\pi^3\sigma^2/m^4) (\mathfrak{Y}, \text{ grad}(\mathfrak{Y}, \text{ grad } \chi))$$

mit der Abkürzung

$$\chi = (\text{ grad } \sigma, \text{ grad } u). \quad (125)$$

Speziell in Zylinderkoordinaten  $x, y, \alpha$  hat man wegen (120), (123) und (125)

$$\chi = 2x \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \frac{\partial U}{\partial x} \cos m \alpha,$$

woraus mit (83)

$$(\mathfrak{Y}, \text{ grad } \chi) = - \frac{m}{\pi x} \frac{\partial U}{\partial x} \sin m \alpha,$$

$$(\mathfrak{Y}, \text{ grad}(\mathfrak{Y}, \text{ grad } \chi)) = - \frac{m^2}{2\pi^2 x^3} \frac{\partial U}{\partial x} \cos m \alpha \\ = - \frac{m^2 \chi}{4\pi^2 x^4} = - \frac{m^2 \chi}{4\pi^2 \sigma^2}$$

folgt. Einsetzen in (124) ergibt dann

$$\text{div } \mathfrak{v} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{P} \quad (\text{s. Anm. } 28). \quad (126)$$

Durch vektorielle Multiplikation von (122) mit  $\mathfrak{Y}$  entsteht ferner

$$[\mathfrak{v}, \mathfrak{Y}] = - \frac{4\pi}{m^2} [\text{ grad } u, \sigma \mathfrak{Y}];$$

wegen (116) ist  $\text{ grad } u$ , wegen (83) und (123) aber auch

$$\sigma \mathfrak{Y} = \frac{x}{2\pi} \mathfrak{e}_\alpha \quad \text{in } \mathfrak{P} \quad (127)$$

divergenzfrei, so daß mit Hilfe der elementaren Vektorformel (24) in kartesischen Koordinaten

$$\text{rot}_i[\mathfrak{v}, \mathfrak{Y}] = - \frac{4\pi}{m^2} \{ \sigma Y_k u_{|ik} - u_{|k} (\sigma Y_i)_{|k} \} \quad (128)$$

wird. Nun beschreibt das Vektorfeld  $\sigma \mathfrak{Y}$  gemäß (127) eine reine Rotation um die Symmetrieachse, d. h. eine *deformationsfreie Transformation des euklidischen Raumes in sich selbst*. Für solche in der Differentialgeometrie „Bewegungen“ genannte Transformationen gelten notwendig und hinreichend die sogen. KILLINGSCHEN Gleichungen

$$\text{def}_{ik}(\sigma \mathfrak{Y}) \equiv \frac{1}{2} \{ (\sigma Y_i)_{|k} + (\sigma Y_k)_{|i} \} = 0, \quad (129)$$

mit deren Hilfe (128) in

$$\text{rot}_i[\mathfrak{v}, \mathfrak{Y}] = - \frac{4\pi}{m^2} \{ \sigma Y_k u_{|ik} + u_{|k} (\sigma Y_i)_{|i} \}$$

oder

$$\text{rot}[\mathfrak{v}, \mathfrak{Y}] = - \frac{4\pi}{m^2} \text{ grad}(\sigma \mathfrak{Y}, \text{ grad } u)$$

übergeht. Durch Multiplikation mit  $2\pi t$  entsteht hieraus wegen (77)

$$\text{rot}[\mathfrak{v}, \mathfrak{B}] = - \frac{4\pi}{m^2} \text{ grad}(\sigma \mathfrak{B}, \text{ grad } u) \text{ in } \mathfrak{P}. \quad (130)$$

Aus (13), (73), (74), (126) und (130) folgt schließlich, daß  $\mathfrak{v}$  eine Lösung der Diff.-Gln. (47) ist.

Ferner ergibt sich aus (14), (74), (126) und (130) der (auf Grund des Satzes im Abschnitt 6)

<sup>28</sup> Auf Grund des Eindeutigkeitssatzes aus Abschnitt 6 gilt damit für alle Lösungen  $\mathfrak{v}$  von (47) mit den Randwerten (115)

$$\sqrt{p} \text{ div } \mathfrak{v} = 0 \text{ in } \mathfrak{P}.$$

Von dieser Tatsache wird jedoch bei den weiteren Betrachtungen kein Gebrauch gemacht.

für alle Lösungen des Randwertproblems eindeutige Skalar

$$S\mathfrak{v} = -\frac{1}{m^2} (\mathfrak{B}, \operatorname{grad}(\sigma \mathfrak{B}, \operatorname{grad} u)) \text{ in } \mathfrak{P}. \quad (131)$$

In Zylinderkoordinaten läßt sich dieser Ausdruck mit Hilfe von (85), (120) und (123) noch weitgehend vereinfachen:

$$\begin{aligned} (\sigma \mathfrak{B}, \operatorname{grad} u) &= -m t U \sin m \alpha, \\ (\mathfrak{B}, \operatorname{grad}(\sigma \mathfrak{B}, \operatorname{grad} u)) &= -(m^2 t^2/x^2) U \cos m \alpha \\ &= -m^2 \mathfrak{B}^2 u; \end{aligned}$$

Einsetzen in (131) bringt dann auf anderem Wege das bekannte Ergebnis<sup>3</sup>

$$S\mathfrak{v} = \mathfrak{B}^2 u \quad \text{in } \mathfrak{P}. \quad (132)$$

Damit ist erreicht, daß das Funktional (48) eindeutig durch  $(\mathfrak{n}, \mathfrak{v})$  auf  $\mathfrak{S}$  erklärt ist. Auf Grund der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen läßt sich dann das Minimum  $F_{\min}^*$  von  $F^*$  unter der Nebenbedingung (49) im Falle seiner Existenz dadurch ermitteln, daß man  $F^*$  zunächst für jedes feste  $m \geq 0$ , genauer, für alle Normalkomponenten von der Form (115) unter der gleichen Nebenbedingung (49) minimalisiert. Bezeichnet  $F^{*(m)}$  den Wert des Funktionalen  $F^*$  für die speziellen Normalkomponenten (115) und existiert auch dessen Minimum  $F_{\min}^{*(m)}$  unter der genannten Nebenbedingung, so gilt daher

$$F_{\min}^* = \min \{F_{\min}^{*(0)}, F_{\min}^{*(1)}, F_{\min}^{*(2)}, \dots\}. \quad (133)$$

(Falls sämtliche  $F_{\min}^{*(m)}$  existieren, nicht aber das Minimum (133), so ist statt dessen das Infimum  $F_{\min}^*$  der  $F_{\min}^{*(m)}$  zu nehmen und für das Stabilitätsverhalten sinngemäß auszuwerten.)

Da somit für die Stabilität des Plasmatorus allein das Vorzeichen der  $F_{\min}^{*(m)}$ ,  $m \geq 0$ , entscheidend ist, wird man diese Größen praktisch nur soweit berechnen, wie es nötig ist, um einigermaßen sicher auf das Vorzeichen von (133) schließen zu können. Eine allgemeine Vermutung geht nun dahin, daß  $F_{\min}^{*(0)} > 0$  ist, die azimutalunabhängigen Störungen also stets stabil sind<sup>3</sup>; infolgedessen spielt  $F_{\min}^{*(0)}$  für das Vorzeichen von  $F_{\min}^*$  keine Rolle, so daß

$$\min \{F_{\min}^{*(1)}, F_{\min}^{*(2)}, \dots\}$$

bereits allein das Stabilitätsverhalten entscheidet. Wir schließen uns diesem Standpunkt an und beschränken uns daher auch hier im folgenden auf die Bestimmung der  $F_{\min}^{*(m)}$  für  $m > 0$ . Grundsätzlich aber lassen sich die in dieser Arbeit verwendeten Methoden unter Benutzung der angegebenen Literatur ohne Schwierigkeiten auf den Fall  $m = 0$  übertragen.

## 9. Bemerkung zur Methode

Es erhebt sich die Frage, ob und inwieweit sich die Methode zur Behandlung des Randwertproblems auch auf andere, nicht torusartige zweifach zusammenhängende Plasmagebiete  $\mathfrak{P}$  ausdehnen läßt. Wir wollen zeigen, daß man diese Fragestellung in bestimmtem Sinne negativ beantworten kann.

Ohne Zweifel stellt der rein geometrische Skalar  $\sigma$  in dem Randwertproblem (116) bis (118) ein wichtiges und in bezug auf das eigentliche Problem neues Element dar. Die invariante Bedeutung von  $\sigma$  wird in den KILLINGSchen Gln. (129) offenbar: Hier entsteht aus dem (ebenfalls nur durch die Geometrie von  $\mathfrak{P}$  bestimmten) Vektor  $\mathfrak{V}$  durch Anbringung des Proportionalitätsfaktors  $\sigma$  ein *deformationsfreier* Vektor  $\sigma \mathfrak{V}$ . Wir suchen jetzt nach allen zweifach zusammenhängenden Plasmagebieten  $\mathfrak{P}$ , denen ein Skalar  $\sigma > 0$  mit eben dieser Eigenschaft zugeordnet werden kann.

Für allgemeine zweifach zusammenhängende Gebiete  $\mathfrak{P}$  lassen sich immer dreidimensionale krummlinige Koordinaten  $u^1, u^2, u^3$  einführen, wobei  $0 \leq u^3 \leq 2\pi$  das Azimut und  $u^3 = \text{const}$  Äquipotentialflächen des durch (78) bis (81) erklärten Vektorfeldes  $\mathfrak{V}$  bedeuten. Wählt man ferner die Orthogonaltrajektorien der Flächen  $u^3 = \text{const}$ , also die Feldlinien<sup>29</sup> von  $\mathfrak{V}$  als Koordinatenlinien  $u^1 = \text{const}$ ,  $u^2 = \text{const}$ , so lautet das Linienelement in  $\mathfrak{P}$

$$ds^2 = g_{ik} du^i du^k, \quad (134)$$

$$\text{mit} \quad g_{13} = 0, \quad g_{23} = 0. \quad (135)$$

Die kovarianten Komponenten von  $\mathfrak{V}$  sind

$$Y_1 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad Y_3 = 1/2\pi, \quad (136)$$

die kontravarianten

$$Y^1 = 0, \quad Y^2 = 0, \quad Y^3 = g^{33}/2\pi, \quad (137)$$

wenn  $g^{ik}$  wie üblich die Reziproke zu  $g_{ik}$  bedeutet. Die Bedingungsgleichungen (129) für  $\sigma$  werden auf beliebige krummlinige Koordinaten transformiert, indem man die auftretenden Komponenten als kovariante Komponenten und die partiellen Ableitungen als kovariante Ableitungen auffaßt. Dadurch entsteht

$$\frac{1}{2} \{ (\sigma Y_i)_{|k} + (\sigma Y_k)_{|i} \} - \Gamma_{ik}^r \sigma Y_r = 0 \quad (138)$$

mit den CHRISTOFFELSchen Symbolen

$$\Gamma_{ik}^r = \frac{1}{2} g^{rs} (g_{si|k} + g_{sk|i} - g_{ik|s}). \quad (139)$$

Aus (136) und (138) folgt bei Beachtung von  $\sigma > 0$

$$\Gamma_{11}^3 = 0, \quad \Gamma_{12}^3 = 0, \quad \Gamma_{22}^3 = 0,$$

$$(\ln \sigma)_{|1} = 2 \Gamma_{13}^3, \quad (\ln \sigma)_{|2} = 2 \Gamma_{23}^3, \quad (\ln \sigma)_{|3} = \Gamma_{33}^3.$$

<sup>29</sup> Es wird ausdrücklich nicht vorausgesetzt, daß sich die Feldlinien nach einem Umlauf durch  $\mathfrak{P}$  schließen sollen.

Mit Hilfe von (135), (139) und

$$g^{33} = 1/g_{33} \quad (140)$$

ergibt sich hieraus

$$g_{11|3} = 0, \quad g_{12|3} = 0, \quad g_{22|3} = 0, \quad (141)$$

$$(\ln \sigma)_{|1} = (\ln g_{33})_{|1}, \quad (142)$$

$$(\ln \sigma)_{|2} = (\ln g_{33})_{|2}, \quad (143)$$

$$(\ln \sigma)_{|3} = \frac{1}{2} (\ln g_{33})_{|3}. \quad (144)$$

Die Divergenzfreiheit für  $\mathfrak{V}$  liefert mit (137) die weitere Bedingung

$$\operatorname{div} \mathfrak{V} \equiv \frac{1}{Vg} (\sqrt{g} Y^i)_{|i} = \frac{1}{2\pi \sqrt{g}} (\sqrt{g} g^{33})_{|3} = 0,$$

wobei  $g = g_{33} (g_{11} g_{22} - (g_{12})^2)$

die Determinante der  $g_{ik}$  bedeutet. Benutzung von (140) bringt daher

$$(\sqrt{[g_{11} g_{22} - (g_{12})^2]/g_{33}})_{|3} = 0,$$

was aber wegen (141) nur dann möglich ist, wenn auch  $g_{33}$  nicht von  $u^3$  abhängt. Damit hängen aber sämtliche  $g_{ik}$  nicht von  $u^3$  ab, d. h. es gilt ganz allgemein

$$g_{ik|3} = 0. \quad (145)$$

Diese Bedingungen sind nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Existenz einer Lösung  $\sigma > 0$  von (138); denn aus (145) folgt unmittelbar  $\sigma = g_{33}$  als Lösung von (142) bis (144) (die allgemeine Lösung geht übrigens aus dieser speziellen nur durch Multiplikation mit einem konstanten positiven Faktor hervor).

Die Notwendigkeit der rein geometrischen Bedingungen (145) besagt, daß der euklidische Teilraum  $\mathfrak{P}$  „eine Bewegung in  $u^3$ -Richtung“ gestatten muß. Die allgemeine Bewegung eines euklidischen Raumes setzt sich aber nach einem bekannten Satz der Differentialgeometrie stets aus einer Translation und aus einer Rotation um eine feste Achse zusammen. Die einzigen mit (145) verträglichen Geometrien sind daher Überlagerungen von allgemeinen Zylinder- und Torusgeometrien, von denen allein die Torusgeometrien zu *zweifach zusammenhängenden* Plasmagebieten  $\mathfrak{P}$  führen.

## 10. Der Beitrag des Vakuumfeldes

Wir wenden uns der Lösung des Randwertproblems (62) bis (66) mit dem speziellen Normalkomponenten (115) für  $m > 0$  zu. Die in (64) auftretende Divergenz in der Fläche lautet auf Grund des Linienelementes (89)

$$\operatorname{Div} ((\mathfrak{n}, \mathfrak{v}) \mathfrak{B}')$$

$$= \frac{1}{x \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} [x \sqrt{x^2 + y^2} (\mathfrak{n}, \mathfrak{v}) B'^1] \\ + \frac{\partial}{\partial \alpha} [(\mathfrak{n}, \mathfrak{v}) B'^2];$$

eliminiert man die kontravarianten Komponenten

von  $\mathfrak{B}'$  durch (112) und  $(\mathfrak{n}, \mathfrak{v})$  durch (115), so wird

$$\operatorname{Div} ((\mathfrak{n}, \mathfrak{v}) \mathfrak{B}') = \frac{\cos m \alpha}{x \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{d}{d\varphi} (x B'_\varphi V) \quad (146) \\ - (m t' \sin m \alpha / x^2) V \quad \text{auf } \mathfrak{S}.$$

Die Lösung  $\mathfrak{w}$  des Randwertproblems läßt sich nunmehr als Summe zweier Teillösungen  $\mathfrak{w}_1$  und  $\mathfrak{w}_2$  darstellen, von denen jede den Bedingungen (62), (63), (65) und (66) genügt, an Stelle von (64) jedoch die Randbedingungen

$$(\mathfrak{n}, \mathfrak{w}_1) = \frac{\cos m \alpha}{x \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{d}{d\varphi} (x B'_\varphi V) \quad \text{auf } \mathfrak{S}, \quad (147)$$

$$(\mathfrak{n}, \mathfrak{w}_2) = - (m t' \sin m \alpha / x^2) V \quad \text{auf } \mathfrak{S} \quad (148)$$

erfüllt. Auf Grund bekannter Existenzsätze<sup>7</sup> sind  $\mathfrak{w}_1$  und  $\mathfrak{w}_2$  damit vollständig in  $\mathfrak{B}$  bestimmt und wegen (62) und (66) überdies aus *einwertigen* skalaren Potentialen ableitbar:

$$\mathfrak{w}_1 = - \operatorname{grad} u_1 \quad \text{in } \mathfrak{B}, \quad (149)$$

$$\mathfrak{w}_2 = - \operatorname{grad} u_2 \quad \text{in } \mathfrak{B}. \quad (150)$$

Diese Potentiale sind wegen (63), (65), (147) und (148) durch je ein NEUMANNSches Problem

$$\Delta u_1 = 0 \quad \text{in } \mathfrak{B}, \quad (151)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = - \frac{\cos m \alpha}{x \sqrt{x^2 + y^2}} \frac{d}{d\varphi} (x B'_\varphi V) \quad \text{auf } \mathfrak{S}, \quad (152)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{S}' \quad (153)$$

und

$$\Delta u_2 = 0 \quad \text{in } \mathfrak{B}, \quad (154)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n} = \frac{m t' \sin m \alpha}{x^2} V \quad \text{auf } \mathfrak{S}, \quad (155)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{S}' \quad (156)$$

bis auf eine unwesentliche additive Konstante eindeutig bestimmt. Durch eine entsprechende Schlußweise wie in Abschnitt 8 zeigt man leicht, daß die Potentiale in der Form

$$u_1 = U_1(x, y) \cos m \alpha \quad \text{in } \mathfrak{B}, \quad (157)$$

$$u_2 = U_2(x, y) \sin m \alpha \quad \text{in } \mathfrak{B} \quad (158)$$

darstellbar sind. Die kovarianten Komponenten der in die Plasmaoberfläche  $\mathfrak{S}$  projizierten Gradienten (149) und (150) ergeben sich daraus zu

$$w_{11} = - \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} = - \frac{dU_1}{d\varphi} \cos m \alpha,$$

$$w_{12} = - \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} = m U_1 \sin m \alpha,$$

$$w_{21} = - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} = - \frac{dU_2}{d\varphi} \sin m \alpha,$$

$$w_{22} = - \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} = - m U_2 \cos m \alpha.$$

Zusammen mit (9) und (112) folgt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{B}', \mathfrak{w}) &= (\mathfrak{B}', \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2) \\ &= B'^1(w_{11} + w_{21}) + B'^2(w_{12} + w_{22}) \\ &= -\left(\frac{B'_\varphi}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{dU_1}{d\varphi} + \frac{m t'}{x^2} U_2\right) \cos m \alpha \\ &\quad -\left(\frac{B'_\varphi}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{dU_2}{d\varphi} - \frac{m t'}{x^2} U_1\right) \sin m \alpha, \end{aligned}$$

so daß der Beitrag (61) zum Funktional  $F^{*(m)}$  wegen (115) nach Ausführung der Integrationen über

$\alpha$  lautet

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{C}} \int (\mathfrak{n}, \mathfrak{v}) (\mathfrak{B}', \text{rot } \mathfrak{A}) df &= -\pi \int_{\mathfrak{C}} V \left( \frac{B'_\varphi}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{dU_1}{d\varphi} + \frac{m t'}{x^2} U_2 \right) x ds. \end{aligned} \quad (159)$$

Die  $L_{ik}^{(-1)}$  enthaltende quadratische Form in (61) verschwindet, da  $(\mathfrak{B}', \mathfrak{Y}_1)$  und  $(\mathfrak{B}', \mathfrak{Y}_2)$  aus Symmetriegründen nicht vom Azimut abhängen; eine explizite Berechnung der Induktionsmatrix  $L_{ik}$  kann daher im Falle  $m > 0$  grundsätzlich unterbleiben.

## 11. Quadratische Form für $F^{*(m)}$

Die spezielle Form der Normalkomponenten (115) gestattet es, das Funktional (48) auf ein Kurvenintegral über  $\mathfrak{C}$  zu reduzieren, da sämtliche Integrationen über das Azimut  $\alpha$  geschlossen vorgenommen werden können. Aus (113) und (115) folgt nämlich

$$\int_{\mathfrak{C}} \int (\mathfrak{n}, \mathfrak{v})^2 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}'^2 - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 - p \right) df = \frac{1}{4} \int_{\mathfrak{C}} V^2 \left( \frac{t^2 - t'^2}{x^3} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - B'^2 \frac{\dot{x} \ddot{y} - \dot{y} \ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}} \right) x ds, \quad (160)$$

entsprechend aus (92), (115), (120) und (132)

$$\int_{\mathfrak{C}} \int (\mathfrak{n}, \mathfrak{v}) S \mathfrak{v} df = \pi t^2 \int_{\mathfrak{C}} (V U/x) ds. \quad (161)$$

Denken wir uns (159) bis (161) in (48) eingesetzt, ferner die Integration über  $\mathfrak{C}$  auf den Kurvenparameter  $\varphi$  transformiert, so liefert die Anwendung der Rechteckformel (griechische Indizes zeigen an, daß die Funktionswerte an den  $2N$  äquidistanten „Stützstellen“

$$\varphi = \mu \pi/N, \quad \mu = 0, \dots, (2N-1),$$

des Intervalls  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  zu nehmen sind) die Approximation

$$\begin{aligned} F^{*(m)} &= \frac{\pi}{2N} \sum_{\mu=0}^{2N-1} \left\{ -\pi t^2 \frac{V_\mu U_\mu}{x_\mu} + \frac{1}{4} V_\mu^2 \left( \frac{t^2 - t'^2}{x_\mu^2} \frac{\dot{y}_\mu}{\sqrt{\dot{x}_\mu^2 + \dot{y}_\mu^2}} - x_\mu B'^2_{\varphi\mu} \frac{\dot{x}_\mu \ddot{y}_\mu - \dot{y}_\mu \ddot{x}_\mu}{(\sqrt{\dot{x}_\mu^2 + \dot{y}_\mu^2})^3} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} V_\mu \left( \frac{x_\mu B'^2_{\varphi\mu}}{\sqrt{\dot{x}_\mu^2 + \dot{y}_\mu^2}} \frac{dU_1}{d\varphi} \Big|_\mu + \frac{m t'}{x_\mu} U_{2\mu} \right) \right\} \sqrt{\dot{x}_\mu^2 + \dot{y}_\mu^2}. \end{aligned} \quad (162)$$

Da wir uns auf den Standpunkt stellen, daß nur die Parameterdarstellungen  $x(\varphi)$ ,  $y(\varphi)$ ,  $x'(\varphi)$ ,  $y'(\varphi)$ <sup>30</sup>, nicht aber deren Ableitungen bekannt sind und da außerdem in anderem Zusammenhang Ableitungen nach  $\varphi$  auftreten, benötigen wir ein Verfahren zur numerischen Differentiation. Da es sich hier ausschließlich um periodische Funktionen  $f(\varphi)$  mit der Periode  $2\pi$  handelt, empfiehlt sich die folgende, auf trigonometrischer Interpolation beruhende Formel<sup>31</sup>:

$$\frac{df}{d\varphi} \Big|_\mu = \sum_{r=0}^{2N-1} D_{r-\mu} f_r, \quad \mu = 0, \dots, (2N-1), \quad (163)$$

mit

$$D_\mu = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mu = 0, \\ -\frac{1}{2}(-1)^\mu \operatorname{ctg}(\mu \pi/(2N)), & \text{falls } |\mu| = 1, \dots, (2N-1). \end{cases} \quad (164)$$

Wir denken uns im folgenden  $\dot{x}_\mu$ ,  $\ddot{x}_\mu$ ,  $\dot{y}_\mu$ ,  $\ddot{y}_\mu$ , ... in dieser Weise erklärt, ohne dies besonders zu kennzeichnen.

<sup>30</sup> Es genügt sogar, wenn die Parameterdarstellungen allein an den diskreten Stützstellen  $\varphi = \mu \pi/N$ ,  $\mu = 0, \dots, (2N-1)$ , bekannt sind.

<sup>31</sup> E. MARSEN, Arch. Rational Mech. Anal. 3, 235 [1959].

Zur praktischen Bestimmung von  $U_\mu$ ,  $U_{1\mu}$ ,  $U_{2\mu}$  aus den entsprechenden Randwertproblemen (116) bis (118), (151) bis (153), (154) bis (156) bedient man sich der *Methode der Randmatrizen*. Da die Berechnung solcher Matrizen in Abschnitt 15 beschrieben wird, braucht an dieser Stelle nur ihre Anwendung erklärt zu werden. So ergibt sich die Spaltenmatrix  $U_\mu$ , d. h. die Amplitude der Lösung  $u$  von (116) bis (118), genommen an den  $2N$  Stützstellen, als das Matrixprodukt aus einer „Randmatrix“  $M_{\mu\nu}^{(m)}$  und der Spaltenmatrix der Amplituden der negativen Normalableitung (117), genommen an denselben Stützstellen:

$$U_\mu = \frac{m^2}{4\pi} \sum_{\nu=0}^{2N-1} M_{\mu\nu}^{(m)} \frac{V_\nu}{x_\nu^2}, \quad \mu = 0, \dots, (2N-1). \quad (165)$$

Entsprechend folgt mit Hilfe einer Randmatrix  $M_{\mu\nu}^{'(m)}$  aus (151) bis (156)

$$U_{1\mu} = \sum_{\sigma=0}^{2N-1} M_{\mu\sigma}^{'(m)} \frac{1}{x_\sigma \sqrt{\dot{x}_\sigma^2 + \dot{y}_\sigma^2}} \left. \frac{d(x B_\varphi' V)}{d\varphi} \right|_\sigma, \quad \sigma = 0, \dots, (2N-1), \quad (166)$$

$$U_{2\mu} = -m t' \sum_{\nu=0}^{2N-1} M_{\mu\nu}^{'(m)} \frac{V_\nu}{x_\nu^2}, \quad \mu = 0, \dots, (2N-1). \quad (167)$$

Mit Hilfe von (163) ist nun

$$\left. \frac{dU_1}{d\varphi} \right|_\mu = \sum_{\sigma=0}^{2N-1} D_{\sigma-\mu} U_{1\sigma}, \quad \left. \frac{d(x B_\varphi' V)}{d\varphi} \right|_\sigma = \sum_{\nu=0}^{2N-1} D_{\nu-\sigma} x_\nu B_{\varphi\nu}' V_\nu,$$

so daß zusammen mit (166)

$$\left. \frac{dU_1}{d\varphi} \right|_\mu = \sum_{\sigma=0}^{2N-1} \sum_{\nu=0}^{2N-1} \sum_{\sigma=0}^{2N-1} \frac{D_{\sigma-\mu} M_{\sigma\sigma}^{'(m)} D_{\nu-\sigma}}{x_\sigma \sqrt{\dot{x}_\sigma^2 + \dot{y}_\sigma^2}} x_\nu B_{\varphi\nu}' V_\nu, \quad \mu = 0, \dots, (2N-1), \quad (168)$$

entsteht. Setzen wir jetzt (165), (166) und (168) in (162) ein, so wird

$$F^{*(m)} = \frac{\pi}{8Nl} \sum_{\mu=0}^{2N-1} \sum_{\nu=0}^{2N-1} (t^2 \Theta_{\mu\nu} - t'^2 \Theta'_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu B'_{\varphi\mu} B'_{\varphi\nu} \Gamma_{\mu\nu}) V_\mu V_\nu \quad (169)$$

mit den numerisch leicht zu berechnenden, *allein durch  $m$  und die Geometrie der Anordnung bestimmten* dimensionslosen Matrizen<sup>32</sup>

$$\Theta_{\mu\nu} = [l/(x_\mu x_\nu)] [\delta_{\mu\nu} \dot{y}_\mu - (m^2/x_\nu) M_{\mu\nu}^{(m)} \sqrt{\dot{x}_\mu^2 + \dot{y}_\mu^2}], \quad \mu, \nu = 0, \dots, (2N-1), \quad (170)$$

$$\Theta'_{\mu\nu} = [l/(x_\mu x_\nu)] [\delta_{\mu\nu} \dot{y}_\mu - (m^2/x_\nu) M_{\mu\nu}^{'(m)} \sqrt{\dot{x}_\mu^2 + \dot{y}_\mu^2}], \quad \mu, \nu = 0, \dots, (2N-1), \quad (171)$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = l \left( \frac{\delta_{\mu\nu}}{x_\mu} \frac{\dot{x}_\mu \dot{y}_\mu - \dot{y}_\mu \dot{x}_\mu}{\dot{x}_\mu^2 + \dot{y}_\mu^2} + \sum_{\sigma=0}^{2N-1} \sum_{\nu=0}^{2N-1} \frac{D_{\sigma-\mu} M_{\sigma\sigma}^{'(m)} D_{\nu-\sigma}}{x_\sigma \sqrt{\dot{x}_\sigma^2 + \dot{y}_\sigma^2}} \right), \quad \mu, \nu = 0, \dots, (2N-1). \quad (172)$$

Wir wenden uns jetzt der Nebenbedingung (49) zu, in der wir über die Konstante  $C^* > 0$  geeignet verfügen:

$$\iint_{\mathfrak{E}} (\mathfrak{n}, \mathfrak{v})^2 df = 8\pi a^3 c^2 l^2. \quad (173)$$

Wegen (115) folgt

$$\iint_{\mathfrak{E}} V^2 x ds = 8\pi a^3 c^2 l^2$$

und nach Anwendung der Rechteckformel

$$\sum_{\mu=0}^{2N-1} V_\mu^2 x_\mu \sqrt{\dot{x}_\mu^2 + \dot{y}_\mu^2} = 8N a^3 c^2 l^2. \quad (174)$$

Durch Einführung einer im Intervall  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  dimensionslosen Funktion

$$V^* = \frac{1}{2cl} \sqrt{\frac{x \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{2N a^3}} V \quad (175)$$

sowie mit Hilfe der dimensionslosen Größen (102) bis (104) wird (169) schließlich in die dimensionslose quadratische Form

$$\frac{l F^{*(m)}}{4\pi l^2} = \sum_{\mu=0}^{2N-1} \sum_{\nu=0}^{2N-1} A_{\mu\nu} V_\mu^* V_\nu^* \quad (176)$$

<sup>32</sup> Man beachte, daß die Randmatrizen die Dimension einer Länge besitzen.

mit der Koeffizientenmatrix

$$A_{\mu\nu} = a l^2 \frac{T^2 \Theta_{\mu\nu} - T'^2 \Theta'_{\mu\nu} - G_\mu G_\nu \Gamma_{\mu\nu}}{\sqrt{x_\mu x_\nu \sqrt{(\dot{x}_\mu^2 + \dot{y}_\mu^2)(\dot{x}_\nu^2 + \dot{y}_\nu^2)}}}, \quad (177)$$

$$\mu, \nu = 0, \dots, (2N-1),$$

transformiert. Darin sind die  $G_\mu$  wegen (105) durch

$$G_\mu = [(x_\mu^2/l^2) P + T^2 - T'^2]^{1/2}, \quad (178)$$

$$\mu = 0, \dots, (2N-1),$$

gegeben, wobei insbesondere  $P$  in Abhängigkeit von  $T, T'$  und der Kontur  $\mathfrak{C}$  aufzufassen ist. Das verallgemeinerte Aspektverhältnis (98) wird numerisch ausgewertet durch

$$a = \frac{1}{2N} \sum_{\mu=0}^{2N-1} \sqrt{\dot{x}_\mu^2 + \dot{y}_\mu^2}. \quad (179)$$

Die Nebenbedingung (174) geht durch (175) über in

$$\sum_{\mu=0}^{2N-1} V_\mu^{*2} = 1. \quad (180)$$

Da die Matrix  $A_{\mu\nu}$  somit ohne Schwierigkeiten numerisch berechnet werden kann, steht man jetzt vor der Aufgabe, die quadratische Form (176) unter der Nebenbedingung (180) in einer dem Problem angemessenen Weise zu minimalisieren.

## 12. Numerisches Minimalisierungsverfahren

Man könnte zunächst daran denken, das Minimum der quadratischen Form (176) unter der Nebenbedingung (180) einfach mit dem kleinsten Eigenwert der reellen symmetrischen Matrix

$$\frac{1}{2} (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}) \quad (181)$$

zu identifizieren. Dies befindet sich mit den bekannten Grundtatsachen der linearen Algebra in Übereinstimmung, solange die miteinander konkurrierenden Werte für  $V_\mu^*$ ,  $\mu = 0, \dots, (2N-1)$ , allein der Normierungsbedingung (180) zu unterwerfen sind. In Wirklichkeit müssen wir jedoch mehr fordern, nämlich daß diese Werte eine derart „hinreichend reguläre“ periodische Funktion  $V^*(\varphi)$  an den zugrunde liegenden Stützstellen approximieren, daß die vorausgegangenen Quadraturauswertungen mit

<sup>33</sup> Tatsächlich blieb dieser Gesichtspunkt bei den ersten praktischen Rechenversuchen unberücksichtigt, was zu einem Mißerfolg führte: Es ergaben sich in allen gerechneten Fällen negative Werte für  $F_{\text{Min}}^{*(m)}$ .

Hilfe der Rechteckformel auch nachträglich noch gerechtfertigt bleiben <sup>33</sup>. Ob dies der Fall ist oder nicht, erkennt man z. B. am Konvergenzverhalten des zum kleinsten Eigenwert von (181) gehörigen Eigenvektors bei wachsender Stützstellenzahl  $2N$ . Wir beschreiben jetzt ein Minimalisierungsverfahren, das in allen bisher behandelten Fällen zum Ziele geführt hat.

Als Ausgangspunkt dienen uns die bekannten Zusammenhänge bei der trigonometrischen Interpolation <sup>34</sup>. Eine mit  $2\pi$  periodische und an den  $2N$  Stützstellen der Periode durch  $f_\mu$ ,  $\mu = 0, \dots, (2N-1)$ , gegebene Funktion läßt sich auf genau eine Weise durch ein trigonometrisches Polynom von der Form

$$f(\varphi) = \sum_{\varrho=0}^N a_\varrho \cos \varrho \varphi + \sum_{\varrho=1}^{N-1} b_\varrho \sin \varrho \varphi \quad (182)$$

interpolieren; die Koeffizienten lauten dabei

$$a_0 = \frac{1}{2N} \sum_{\mu=0}^{2N-1} f_\mu,$$

$$a_\varrho = \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{2N-1} f_\mu \cos \frac{\mu \varrho \pi}{N}, \quad \varrho = 1, \dots, (N-1),$$

$$a_N = \frac{1}{2N} \sum_{\mu=0}^{2N-1} (-1)^\mu f_\mu,$$

$$b_\varrho = \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{2N-1} f_\mu \sin \frac{\mu \varrho \pi}{N}, \quad \varrho = 1, \dots, (N-1).$$
(183)

Als Folge von (183) besteht die „Vollständigkeitsrelation der trigonometrischen Interpolation“

$$a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^{N-1} (a_\varrho^2 + b_\varrho^2) + a_N^2 = \frac{1}{2N} \sum_{\mu=0}^{2N-1} f_\mu^2. \quad (184)$$

Wir stellen jetzt  $V^*(\varphi)$  durch ein trigonometrisches Polynom dar, welches im Gegensatz zu (182) nicht  $2N$ , sondern nur

$$N^* = \begin{cases} N-1, & \text{falls } N \text{ gerade,} \\ N, & \text{falls } N \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (185)$$

FOURIER-Glieder enthält und höchstens von der Ordnung

$$N^{**} = \frac{1}{2} (N^* - 1) \quad (186)$$

sein kann:

$$V^*(\varphi) = \frac{c_0}{V^2 N} + \frac{1}{VN} \sum_{\varrho=1}^{N^{**}} (c_\varrho \cos \varrho \varphi + c_{\varrho+N^{**}} \sin \varrho \varphi). \quad (187)$$

<sup>34</sup> F. A. WILLERS, Methoden der praktischen Analysis, W. de Gruyter & Co., Berlin 1950.

Es werden also gerade die stark oszillierenden Summanden in (182) unterdrückt, mit anderen Worten, die Koeffizienten  $c_\varrho$ ,  $\varrho = 0, \dots, (N^* - 1)$ , sind nicht dazu angetan, stärker schwankende Funktionswerte  $V_\mu^*$ ,  $\mu = 0, \dots, (2N - 1)$ , mit Hilfe von (187) trigonometrisch zu interpolieren. Umgekehrt kann das in den Stützstellen berechnete FOURIER-Polynom (187) mit zunächst willkürlichen  $c_\varrho$ ,  $\varrho = 0, \dots, (N^* - 1)$ , als „Generator“ solcher  $V_\mu^*$ ,  $\mu = 0, \dots, (2N - 1)$ , dienen, die der geforderten Beschrän-

kung unterliegen:

$$V_\mu^* = \frac{c_0}{\sqrt{2N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\varrho=1}^{N^*} \left( c_\varrho \cos \frac{\mu \varrho \pi}{N} + c_{\varrho+N^*} \sin \frac{\mu \varrho \pi}{N} \right).$$

Dafür schreiben wir kurz

$$V_\mu^* = \sum_{\varrho=0}^{N^*-1} X_{\mu\varrho} c_\varrho, \quad \mu = 0, \dots, (2N - 1), \quad (188)$$

mit der aus  $2N$  Zeilen und  $N^*$  Spalten bestehenden Matrix

$$X_{\mu\varrho} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \frac{\pi}{N} & \dots & \cos \frac{N^* \pi}{N} & \sin \frac{\pi}{N} & \dots & \sin \frac{N^* \pi}{N} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2 \frac{\pi}{N} & \dots & \cos 2 \frac{N^* \pi}{N} & \sin 2 \frac{\pi}{N} & \dots & \sin 2 \frac{N^* \pi}{N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(2N-1) \frac{\pi}{N} & \dots & \cos(2N-1) \frac{N^* \pi}{N} & \sin(2N-1) \frac{\pi}{N} & \dots & \sin(2N-1) \frac{N^* \pi}{N} \end{pmatrix}. \quad (189)$$

Aus (176) und (188) entsteht nun die quadratische Form

$$\frac{l F^{*(m)}}{4 \pi I^2} = \sum_{\varrho=0}^{N^*-1} \sum_{\sigma=0}^{N^*-1} A_{\varrho\sigma}^* c_\varrho c_\sigma \quad (190)$$

mit

$$A_{\varrho\sigma}^* = \sum_{\mu=0}^{2N-1} \sum_{\nu=0}^{2N-1} A_{\mu\nu} X_{\mu\varrho} X_{\nu\sigma}, \quad (191)$$

$$\varrho, \sigma = 0, \dots, (N^* - 1).$$

Da sich die durch (188) erhaltenen Werte  $V_\mu^*$ ,  $\mu = 0, \dots, (2N - 1)$ , durch das spezielle FOURIER-Polynom (187), aus dem sie ja hervorgegangen sind, stets eindeutig trigonometrisch interpolieren lassen, so gilt insbesondere die Vollständigkeitsrelation (184); wegen der besonderen Form der Koeffizienten in (187) erhält man daher

$$\sum_{\varrho=0}^{N^*-1} c_\varrho^2 = \sum_{\mu=0}^{2N-1} V_\mu^{*2}.$$

Unterwerfen wir die bisher willkürlichen  $c_\varrho$ ,  $\varrho = 0, \dots, (N^* - 1)$ , jetzt der Nebenbedingung

$$\sum_{\varrho=0}^{N^*-1} c_\varrho^2 = 1, \quad (192)$$

so ist offenbar auch stets die Nebenbedingung (180) erfüllt. Damit haben wir das Stabilitätsproblem auf die Aufgabe zurückgeführt, die quadratische Form (190) allein unter der Nebenbedingung (192) zu minimisieren. Das Ergebnis lautet also:

Der für das Stabilitätsverhalten des Plasmatorus charakteristische Wert

$$l F_{\text{Min}}^{*(m)} / (4 \pi I^2)$$

ist gleich dem kleinsten Eigenwert der  $N^*$ -reihigen, reellen symmetrischen Matrix

$$A_{\varrho\sigma}^{**} = \frac{1}{2} (A_{\varrho\sigma}^* + A_{\sigma\varrho}^*). \quad (193)$$

Ist nunmehr  $c_\varrho = (c_0, \dots, c_{N^*-1})$  der zum kleinsten Eigenwert von  $A_{\varrho\sigma}^{**}$  gehörige, durch (192) normierte Eigenvektor, so folgt aus (175) und (187)

$$V(\varphi) = 2cl \sqrt{\frac{2a^3}{x(\varphi) \sqrt{[\dot{x}(\varphi)]^2 + [\dot{y}(\varphi)]^2}}} \quad (194)$$

$$\cdot \left\{ \frac{c_0}{\sqrt{2}} + \sum_{\varrho=1}^{N^*} (c_\varrho \cos \varrho \varphi + c_{\varrho+N^*} \sin \varrho \varphi) \right\}$$

als diejenige Amplitude von  $(\mathbf{n}, \mathbf{v})$ , die dem Funktional  $F^{*(m)}$  unter Einhaltung der Nebenbedingung (173) den kleinsten Wert erteilt. Das Ergebnis des Verfahrens darf nur dann als zuverlässig angesehen werden, wenn der kleinste Eigenwert von (193) und die zugehörige Funktion (194) mit wachsender Stützstellenzahl  $2N$  konvergieren. Dabei kann das Konvergenzverhalten von (194) unmittelbar am Eigenvektor  $c_\varrho$  abgelesen werden, die explizite Berechnung von (194) infolgedessen unterbleiben.

Zusammenfassend hat man folgende Schritte der Reihe nach praktisch durchzuführen:

1. Wahl der Stützstellenzahl  $2N$ ;
2. Berechnung der Gewichte  $D_\mu$  und damit der

ersten und zweiten Ableitungen von  $x(\varphi)$ ,  $y(\varphi)$ ,  $x'(\varphi)$ ,  $y'(\varphi)$  in den Stützstellen sowie Berechnung des verallgemeinerten Aspektverhältnisses  $a$ ;

3. Angabe der Zahl  $0 < m \leq N$  (s. Anm.<sup>35</sup>);
4. Berechnung der Randmatrizen  $M_{\mu\nu}^{(m)}$  und  $M_{\mu\nu}^{'(m)}$ ;
5. Berechnung der nur von  $m$  und der Geometrie abhängenden Matrizen  $\Theta_{\mu\nu}$ ,  $\Theta'_{\mu\nu}$ ,  $\Gamma_{\mu\nu}$ ;
6. zu vorgegebenen physikalischen Parametern  $T$  und  $T'$  wird  $P$  mit Hilfe des NEWTONSchen Verfahrens bestimmt und damit gleichzeitig  $G_u$  gewonnen;
7. Berechnung der Matrizen  $A_{\mu\nu}$ ,  $X_{\mu\sigma}$ ,  $A_{\varrho\sigma}^*$ ,  $A_{\varrho\sigma}^{**}$ ;
8. Berechnung des kleinsten Eigenwerts und des zugehörigen normierten Eigenvektors der reellen symmetrischen Matrix  $A_{\varrho\sigma}^{**}$  (hierfür ist z. B. die sogenannte JACOBI-Methode besonders geeignet).

### 13. Asymptotische Näherung

Sind  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S}'$  konzentrische Kreistorusse mit sehr kleinen Aspektverhältnissen, so muß erwartet werden, daß sich das Stabilitätsverhalten derartiger Anordnungen nicht wesentlich von dem eines entsprechenden periodischen Plasmazylinders unterscheidet. Eine anschließend auf dieser Basis hergeleitete Näherungslösung bietet eine Kontrollmöglichkeit bei der praktischen Durchführung der Stabilitätsrechnungen.

Die Parameterdarstellungen der Erzeugenden lauten

$$\mathfrak{S}: x(\varphi) = l + r \cos \varphi, \quad y(\varphi) = r \sin \varphi, \quad (195)$$

$$\mathfrak{S}': x'(\varphi) = l + r' \cos \varphi, \quad y'(\varphi) = r' \sin \varphi, \quad (196)$$

wobei  $r < r' \ll l$

der Forderung nach sehr kleinen Aspektverhältnissen entspricht. Es bietet nun außerordentliche Vorteile für die Herleitung einer asymptotischen Näherungslösung, wenn wir die betrachteten Fälle durch

$$r < r' \ll l/m \quad (197)$$

noch weiterhin einschränken, also jeweils nur Störungen mit hinreichend kleinen  $m > 0$  zugrunde legen. Für die Durchführung einer wirksamen Kontrolle des numerischen Rechenprogramms ist dies natürlich unerheblich, da es ja nur auf eine begrenzte Anzahl fehlerfreier Durchläufe ankommt.

<sup>35</sup> Auf Grund des in Abschnitt 15 beschriebenen Verfahrens zur Gewinnung der Randmatrizen muß  $m$  nach oben durch  $N$  beschränkt sein; eine Erhöhung von  $m$  muß daher gegebenenfalls eine Erhöhung der Stützstellenzahl und damit des Aufwandes nach sich ziehen.

Das Aspektverhältnis (1) des Kreistorus  $\mathfrak{S}$  bekommt wegen (195) und (197) den einfachen Näherungswert

$$a = r/l. \quad (198)$$

Damit lauten die dimensionslosen Größen (101) bis (103)

$$P = 2 \pi c^2 r^2 p/I^2, \quad (199)$$

$$T = c r t/(2 l I), \quad (200)$$

$$T' = c r t'/(2 l I) \quad (201)$$

und die Nebenbedingung (173)

$$\iint_{\mathfrak{S}} (\mathfrak{n}, \mathfrak{v})^2 d\mathfrak{f} = 8 \pi^2 c^2 r^3/l. \quad (202)$$

Zur Berechnung von  $F^{*(m)}$  betrachten wir die Verhältnisse einer (195) und (196) entsprechenden Zylinderanordnung ( $r$  und  $r'$  sind innerer und äußerer Radius,  $2 \pi l$  die Höhe der konzentrischen Zylinder  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S}'$ ). Die Magnetfelder der Gleichgewichtslösung sind in Zylinderkoordinaten  $\varrho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  durch

$$\mathfrak{B} = (t/l) \mathfrak{e}_z \quad \text{in } \mathfrak{P}, \quad (203)$$

$$\mathfrak{B}' = (2 I/c \varrho) \mathfrak{e}_\varphi + (t'/l) \mathfrak{e}_z \quad \text{in } \mathfrak{V} \quad (204)$$

gegeben, wobei  $t \geq 0$  und  $t' \geq 0$  wie bisher durch die wegunabhängigen Integrale (76) und (94) erklärt sind und  $I > 0$  den gesamten in  $z$ -Richtung fließenden Oberflächenstrom auf  $\mathfrak{S}$  bedeutet. Die Gleichgewichtsbedingung (7) liefert unmittelbar den Druck  $p = \text{const}$  in Abhängigkeit der drei Parameter  $t$ ,  $t'$  und  $I$ .

Die auf die Zylindergeometrie übertragene Störung (115) der Plasmaoberfläche lautet

$$(\mathfrak{n}, \mathfrak{v}) = V(\varphi) \cos(mz/l) \quad \text{auf } \mathfrak{S}. \quad (205)$$

Das Randwertproblem für die Diff.-Gln. (47) wird gelöst durch

$$\nabla = - (4 \pi l^2/m^2) \text{ grad } u; \quad (206)$$

dabei ist  $u$  eine einwertige und in  $z$  mit  $2 \pi l$  periodische Lösung des NEUMANNschen Problems

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathfrak{P}, \quad (207)$$

$$\partial u / \partial n = - (m^2 / (4 \pi l^2)) (\mathfrak{n}, \mathfrak{v}) \quad \text{auf } \mathfrak{S} \quad (208)$$

und somit bis auf eine unwesentliche additive Konstante eindeutig bestimmt. Die Randwerte  $(\mathfrak{n}, \mathfrak{v})$  werden von (206) auf  $\mathfrak{S}$  wegen (208) angenommen; ferner ist  $\mathfrak{v}$  wegen (206) und (207) ein harmonischer Vektor, so daß (24) und (203)

$$\text{rot}_i [\mathfrak{v}, \mathfrak{B}] = v_{i|k} B_k = v_{k|i} B_k = (v_k B_k)_{|i}$$

$$\text{oder} \quad \text{rot} [\mathfrak{v}, \mathfrak{B}] = \text{grad} (\mathfrak{v}, \mathfrak{B}) \quad (209)$$

liefern und die Diff.-Gln. (47) erfüllt sind. Aus (14), (206) und (209) ergibt sich weiter

$$Sv = -(l^2/m^2)(\mathfrak{B}, \operatorname{grad}(\mathfrak{B}, \operatorname{grad}u)) \text{ in } \mathfrak{P}. \quad (210)$$

Da für die Lösung  $u$  des NEUMANNschen Problems infolge (205) die Darstellung

$$u = U(\varrho, \varphi) \cos(mz/l) \quad \text{in } \mathfrak{P} \quad (211)$$

existiert und wegen (203)

$$(\mathfrak{B}, \operatorname{grad}(\mathfrak{B}, \operatorname{grad})) = \frac{t^2}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

gilt, vereinfacht sich (210) zu

$$Sv = (t^2/l^2) U(\varrho, \varphi) \cos(mz/l) \text{ in } \mathfrak{P}. \quad (212)$$

Aus (203) und (204) berechnet man direkt

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}'^2 - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}^2 - p \right) = - \frac{I^2}{\pi c^2 r^3} \text{ auf } \mathfrak{S}. \quad (213)$$

Schließlich ergibt sich als Lösung des Randwertproblems (62) bis (66)

$$w = -\operatorname{grad} u' \quad \text{in } \mathfrak{V}, \quad (214)$$

wobei  $u'$  wegen (204) und (205) aus dem NEUMANNschen Problem

$$\Delta u' = 0 \quad \text{in } \mathfrak{V}, \quad (215)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial n} = - \frac{2I}{c r^2} \frac{dV}{d\varphi} \cos \frac{mz}{l} + \frac{m t'}{l^2} V \sin \frac{mz}{l} \text{ auf } \mathfrak{S}, \quad (216)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{S}' \quad (217)$$

als einwertige und in  $z$  mit  $2\pi l$  periodische Funktion zu bestimmen ist und daher wieder bis auf eine additive Konstante eindeutig festgelegt ist. Unter diesen Lösungen befindet sich genau eine von der Form

$$u' = U_1(\varrho, \varphi) \cos \frac{mz}{l} + U_2(\varrho, \varphi) \sin \frac{mz}{l} \quad \text{in } \mathfrak{V}. \quad (218)$$

Es folgt aus (204), (214) und (218)

$$\begin{aligned} (\mathfrak{B}', w) &= - \frac{2I}{c \varrho^2} \frac{\partial u'}{\partial \varphi} - \frac{t'}{l} \frac{\partial u'}{\partial z} \\ &= - \left( \frac{2I}{c \varrho^2} \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} + \frac{m t'}{l^2} U_2 \right) \cos \frac{mz}{l} \quad (219) \\ &\quad - \left( \frac{2I}{c \varrho^2} \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} - \frac{m t'}{l^2} U_1 \right) \sin \frac{mz}{l} \quad \text{in } \mathfrak{V}. \end{aligned}$$

Jetzt können wir das Funktional (48) auf Grund von (61), (205), (212), (213) und (219) hinschreiben und dabei sofort die Integration über  $z$  von 0 bis  $2\pi l$  geschlossen ausführen:

$$F^{*(m)} = \frac{\pi r l}{2} \int_0^{2\pi} V(\varphi) \left\{ - \frac{t^2}{l^2} U(r, \varphi) - \frac{I^2}{\pi c^2 r^3} V(\varphi) - \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{2I}{c r^2} \frac{\partial U_1(r, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{m t'}{l^2} U_2(r, \varphi) \right] \right\} d\varphi. \quad (220)$$

Denken wir uns  $V(\varphi)$  in eine FOURIER-Reihe entwickelt, so dürfen zur Berechnung von  $F_{\min}^{*(m)}$  offenbar die FOURIER-Terme einzeln, und zwar durch (202) normiert, herangezogen werden.

Wir beginnen mit dem von  $\varphi$  unabhängigen, konstanten Anteil dieser Entwicklung, setzen also

$$V(\varphi) = 2c r / l \quad (221)$$

und erfüllen damit gleichzeitig wegen (205) die Nebenbedingung (202). Die Lösung des NEUMANNschen Problems (207) und (208) lautet

$$u = U(\varrho) \cos(mz/l) \quad \text{in } \mathfrak{P}, \quad (222)$$

wobei  $U(\varrho)$  der gewöhnlichen Diff.-Gl.

$$\frac{d^2U}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dU}{d\varrho} - \frac{m^2}{l^2} U = 0, \quad 0 \leq \varrho \leq r, \quad (223)$$

und infolge (205), (208), (221) und (222) der Randbedingung

$$dU/d\varrho|_{\varrho=r} = -m^2 c r / (2\pi l^3) \quad (224)$$

genügen muß. Die Potenzreihe

$$U(\varrho) = - \frac{c}{\pi l} \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{m^2 \varrho^2}{l^2} + \frac{1}{64} \frac{m^4 \varrho^4}{l^4} + \dots \right) \quad (225)$$

ist offenbar eine strenge und bei  $\varrho=0$  reguläre Lösung der Diff.-Gl. (223), während die Randbedingung (224) asymptotisch, d. h. im Sinne der Voraussetzung (197) erfüllt ist. Entsprechend wird das Randwertproblem (215) bis (217) gelöst durch

$$u' = U'(\varrho) \sin(mz/l) \quad \text{in } \mathfrak{V}, \quad (226)$$

wobei  $U'(\varrho)$  durch

$$\frac{d^2U'}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dU'}{d\varrho} - \frac{m^2}{l^2} U' = 0, \quad r \leqq \varrho \leqq r', \quad (227)$$

$$dU'/d\varrho|_{\varrho=r} = 2m c r t'/l^3, \quad dU'/d\varrho|_{\varrho=r'} = 0 \quad (228), \quad (229)$$

bestimmt ist. Auch hier gibt es eine Entwicklung, die die Diff.-Gl. (227) streng, die Randbedingungen (228) und (229) dagegen asymptotisch erfüllt:

$$\begin{aligned} U'(\varrho) = & - \frac{4c r^2 t'}{m l (r'^2 - r^2)} \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{m^2 \varrho^2}{l^2} + \frac{1}{64} \frac{m^4 \varrho^4}{l^4} + \dots \right) \\ & + \frac{2m c r^2 r'^2 t'}{l^3 (r'^2 - r^2)} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{m^2 \varrho^2}{l^2} + \frac{1}{64} \frac{m^4 \varrho^4}{l^4} + \dots \right) \ln \frac{\varrho}{r} + 1 - \frac{1}{128} \frac{m^4 \varrho^4}{l^4} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (230)$$

Durch abermalige Benutzung der Ungleichung (197) entsteht aus (225) und (230)

$$U(r) = -c/\pi l, \quad U'(r) = -4c r^2 t' / [m l (r'^2 - r^2)]. \quad (231), \quad (232)$$

Da  $U(r, \varphi)$  wegen (211) und (222) mit  $U(r)$ , desgleichen  $U_2(r, \varphi)$  wegen (218) und (226) mit  $U'(r)$  identisch ist und da schließlich  $U_1(r, \varphi)$  wegen (216), (218) und (221) verschwindet, folgt durch Einsetzen von (221), (231) und (232) in (220)

$$F^{*(m)} = \frac{2\pi c^2 r^2}{l} \left( \frac{t^2}{l^2} + \frac{r^2 t'^2}{l^2 (r'^2 - r^2)} - \frac{2I^2}{c^2 r^2} \right)$$

oder unter Benutzung der dimensionslosen Größen (200) und (201)

$$\frac{l F^{*(m)}}{4\pi I^2} = 2T^2 + \frac{2r^2}{r'^2 - r^2} T'^2 - 1. \quad (233)$$

Bei dem von  $\varphi$  abhängigen Anteil der FOURIER-Reihe für  $V(\varphi)$  können wir uns aus einleuchtenden Gründen auf die Cosinus-Glieder

$$V(\varphi) = (2\sqrt{2} c r/l) \cos n\varphi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (234)$$

beschränken (man beachte, daß die Nebenbedingung (202) erfüllt ist). Wie man sich leicht überzeugt, lautet die asymptotische Lösung von (207) und (208)

$$u = -[m^2 c r^2 / (\sqrt{2} n \pi l^3)] (\varrho/r)^n \cos n\varphi \cos(mz/l) \quad \text{in } \mathfrak{P} \quad (235)$$

und die des Randwertproblems (215) bis (217)

$$u' = -\frac{2\sqrt{2} c r^2}{l} \frac{(r'/\varrho)^n + (\varrho/r')^n}{(r'/r)^n - (r/r')^n} \left( \frac{2I}{c r^2} \sin n\varphi \cos \frac{mz}{l} + \frac{m t'}{n l^2} \cos n\varphi \sin \frac{mz}{l} \right) \quad \text{in } \mathfrak{V}. \quad (236)$$

Zusammen mit (211) und (218) folgt aus (235) und (236)

$$U(r, \varphi) = -[m^2 c r^2 / (\sqrt{2} n \pi l^3)] \cos n\varphi, \quad (237)$$

$$U_1(r, \varphi) = -\frac{4\sqrt{2} I}{l} \frac{r'^{2n} + r^{2n}}{r'^{2n} - r^{2n}} \sin n\varphi, \quad (238)$$

$$U_2(r, \varphi) = -\frac{2\sqrt{2} m c r^2 t'}{n l^3} \frac{r'^{2n} + r^{2n}}{r'^{2n} - r^{2n}} \cos n\varphi. \quad (239)$$

Einsetzen von (234) und (237) bis (239) in (220) ergibt nach Ausführung der Integration über  $\varphi$

$$F^{*(m)} = \frac{\pi c^2 r^2}{l} \left\{ \frac{m^2 r^2 t^2}{n l^4} + \frac{r'^{2n} + r^{2n}}{r'^{2n} - r^{2n}} \frac{m^2 r^2 t'^2}{n l^4} + \frac{4I^2}{c^2 r^2} \left( n \frac{r'^{2n} + r^{2n}}{r'^{2n} - r^{2n}} - 1 \right) \right\}$$

oder wegen (200) und (201) in dimensionsloser Form

$$\frac{l F^{*(m)}}{4\pi I^2} = \frac{m^2 r^2}{n l^2} \left( T^2 + \frac{r'^{2n} + r^{2n}}{r'^{2n} - r^{2n}} T'^2 \right) + n \frac{r'^{2n} + r^{2n}}{r'^{2n} - r^{2n}} - 1.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich wegen (197) zu

$$\begin{aligned} \frac{l F^{*(m)}}{4 \pi I^2} &= n \frac{r'^{2n} + r^{2n}}{r'^{2n} - r^{2n}} - 1 \\ &= n \operatorname{Ctg}(n \ln(r'/r)) - 1, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (240)$$

Da die Funktion  $x \operatorname{Ctg} x$  im Intervall  $0 < x < \infty$  monoton steigt, ist (240) für  $n=1$  am kleinsten. Um das Minimum von  $F^{*(m)}$  zu erhalten, hat man also (233) mit (240) für  $n=1$  zu vergleichen. Damit haben wir das folgende Ergebnis:

*Sind die Plasmaoberfläche und der äußere Leiter konzentrische Kreistorusse mit gegenüber  $1/m$  sehr kleinen Aspektverhältnissen, so gilt die (von  $m$  selbst nicht abhängige) asymptotische Näherungslösung*

$$\frac{l F_{\min}^{*(m)}}{4 \pi I^2} = \operatorname{Min} \{2 T^2 + 2 q T'^2 - 1; 2 q\}, \quad (241)$$

wobei  $q = r^2/(r'^2 - r^2)$  das Verhältnis von Plasmaquerschnitt zu Vakuumquerschnitt bedeutet.

Hieraus läßt sich unmittelbar ein Stabilitätskriterium ableiten: *Unter den genannten Voraussetzungen über die Geometrie der Gleichgewichtslösung ist*

$$T^2 + q T'^2 > \frac{1}{2} \quad (242)$$

$$\text{bzw. } t^2 + q t'^2 > 2 l^2 I^2 / (c^2 r^2) \quad (243)$$

notwendig und hinreichend für Stabilität gegenüber allen Störungen mit hinreichend kleinen  $m > 0$ . Insbesondere ist daher in diesen Fällen

$$T > \frac{1}{2} \sqrt{2} = 0,70711 \quad (244)$$

bereits hinreichend für Stabilität gegenüber Störungen der genannten Art.

## 14. Beispiele<sup>36</sup>

Wir veranschaulichen das beschriebene numerische Verfahren an Hand einer Reihe von Beispielen mit Kreistorusgeometrie. In den Darstellungen für die erzeugenden Kreise

$$\mathfrak{C}: x(\varphi) = R + r \cos \varphi, \quad y(\varphi) = r \sin \varphi, \quad r < R,$$

$$\mathfrak{C}': x'(\varphi) = R' + r' \cos \varphi, \quad y'(\varphi) = r' \sin \varphi, \quad r' < R',$$

<sup>36</sup> Die numerischen Rechnungen wurden mit einer elektronischen Rechenmaschine vom Typ Siemens 2002 in einer Ausführung mit 2000 Kern- und 10 000 Trommelspeichern durchgeführt.

<sup>37</sup> Bei festem  $\mathfrak{C}'$  sind also hier noch zwei Parameter für  $\mathfrak{C}$  offen, nämlich  $\varepsilon$  und  $r/R'$ . Die Tatsache, daß  $\mathfrak{C}$  bei Einhaltung der Randbedingung

$(n, \mathfrak{B}') = 0$  auf  $\mathfrak{C}'$

seien  $r, r', R'$  beliebige Parameter, während wir

$$R = R' + \varepsilon (R' - \sqrt{R'^2 - r'^2 + r^2}) \quad (245)$$

durch die „Exzentrizität“  $\varepsilon$  festlegen wollen. Dadurch erreichen wir, daß  $\mathfrak{C}$  für alle  $-1 \leq \varepsilon \leq 1$  ganz innerhalb  $\mathfrak{C}'$  liegt, daß  $\varepsilon = -1$  den Fall der Toruskoordinaten (2) und  $\varepsilon = 1$  die entsprechende symmetrisch nach außen verlagerte Anordnung (3) ergibt (Abb. 3). Die Anzahl der geometrischen Parameter verringert sich um eins, wenn wir alle Längen auf  $R'$  beziehen und  $R'$  mit der für das Verfahren zu wählenden Länge  $l$  identifizieren<sup>37</sup>.

Die den numerischen Beispielen zugrunde liegenden geometrischen Parameter  $r'/R'$ ,  $r/R' = (r/r')(r'/R')$  und  $\varepsilon$ , die hieraus folgenden Größen  $R/R'$  und  $a$  sowie die physikalischen Parameter  $T$  und  $T'$ , durch die auch  $T_{\max}$  und  $P$  bestimmt sind, findet man in Tab. 1 (s. auch Abb. 4). Außerdem sind in Tab. 1 das maximale  $m$ , bis zu dem das Verfahren jeweils vorangetrieben wurde, und das Stabilitätsverhalten der betrachteten Gleichgewichtskonfiguration vermerkt. Alle Rechnungen sind für  $2N=8, 12$  und  $16$  Stützstellen auf jeder Erzeugenden  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{C}'$  durchgeführt. Dabei ist eine durchweg gute Konvergenz der Werte für

$$R' F_{\min}^{*(m)} / (4 \pi I^2)$$

bei wachsendem  $2N$  zu verzeichnen (Tab. 2). Im folgenden seien die einzelnen Beispiele kurz kommentiert.

*Beispiel 1.* Da die Aspektverhältnisse von  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{C}'$  sehr klein gegen 1 und  $1/2$  sind und die Exzentrizität  $\varepsilon$  verschwindet, muß die Gültigkeit der asymptotischen Näherung (241) für  $m=1$  und  $m=2$  erwartet werden. Tatsächlich liefert (241)

$$R' F_{\min}^{*(m)} / (4 \pi I^2) = -1$$

in sehr guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der numerischen Rechnung.

*Beispiel 2.* Bei ebenfalls sehr kleinen Aspektverhältnissen sind die Parameter so gewählt, daß die

durch einen einzigen geometrischen Parameter (sinnvollerweise wird man dafür das verallgemeinerte Aspektverhältnis wählen) bestimmt ist, macht deutlich, daß es nicht nur vom physikalischen Standpunkt aus, sondern auch im Interesse der Verminderung des Rechenaufwandes wünschenswert ist, die genaue Gleichgewichtslage des Plasmatorus' (einschließlich aller möglichen Deformationen) zu beherrschen.

Nr.	$r'$ $R'$	$r$ $r'$	$\epsilon$	$R$ $R'$	$a$	$T'$	$T$	$T_{\text{Max}}$	$P$	$m_{\text{Max}}$	Stabilitätsverhalten
1	0,01	0,30	0	1,00000	0,00300	0,00	0,00	1,00	1,00001	2	instabil
2	0,01	0,30	0	1,00000	0,00300	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	0,33334	2	stabil
3	0,22	0,35	1	1,02147	0,07560	0,00	$\frac{7}{4}$	1,00	0,43538	8	instabil
4	0,22	0,35	1	1,02147	0,07560	0,00	0,77	1,00	0,39174	8	?
5	0,22	0,40	1	1,02054	0,08655	0,75	1,15	1,25	0,23151	8	stabil
6	0,40	0,20	1	1,08000	0,07428	2,40	2,60	2,60	0,00000	3	stabil
7	0,60	0,10	-1	0,80225	0,07500	0,75	0,75	1,25	1,56250	2	instabil
8	0,60	0,10	1	1,19775	0,05016	0,75	0,75	1,25	0,69881	2	instabil
9	0,60	0,50	1	1,14560	0,27134	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{13}{2}$	0,67765	1	instabil
10	0,75	0,20	1	1,32177	0,11422	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	0,30510	4	stabil

Tab. 1. Geometrische und physikalische Daten der numerischen Beispiele.

andere Alternative in (241) zur Geltung kommt und damit eine weitere Kontrollmöglichkeit bietet:

$$R' F_{\text{Min}}^{*(m)} / (4 \pi I^2) = 2 q = 0,19780.$$

Auch hier zeigen die numerischen Ergebnisse einen hohen Annäherungsgrad an diesen asymptotischen Wert.

*Beispiel 3.* Obwohl die Aspektverhältnisse von Plasmatorus und äußerem Leiter verhältnismäßig klein sind, beobachtet man schon ein ganz erhebliches Abweichen vom bekannten Stabilitätsverhalten eines Plasmazylinders. Beim Zylinder stellt  $F_{\text{Min}}^{*(1)}$ ,  $F_{\text{Min}}^{*(2)}$ , ... eine monoton wachsende Folge dar, so daß bereits allein das Vorzeichen von  $F_{\text{Min}}^{*(1)}$  die Stabilitätsfrage beantwortet<sup>38</sup>. Demgegenüber nimmt  $F_{\text{Min}}^{*(m)}$  für  $m \geq 1$  beim vorliegenden Beispiel zunächst zu, dann von  $m = 4$  an jedoch ab. Wenn sich dabei auch Stabilität gegenüber sämtlichen Störungen mit  $m = 1, \dots, 7$  ergibt, so wird die Anordnung letzten Endes für  $m = 8$  instabil. Man muß demnach bei der Untersuchung eines Plasmatorus damit rechnen, daß Störungen mit größeren  $m$  noch von wesentlicher Bedeutung für das Stabilitätsverhalten sein können, wodurch u. U. ein beträchtlicher Rechenaufwand bedingt wird. Durch dieses Beispiel wird ein Ergebnis von Lüst et al. (s. Anm. 3, dort S. 901, sowie Anm. 4) nicht bestätigt, wonach wesentliche Abweichungen zwischen Plasmazylinder und Plasmatorus auf sehr große Aspektverhältnisse und kleine Werte für  $m$  beschränkt sein sollen.

*Beispiel 4.* Dieses Beispiel, dessen Parameter sich nur in einem Punkt geringfügig von den vorher-

gehenden unterscheiden, entspricht mit  $R' = 50$  cm den bei der Versuchsanlage „Mimikry“ des Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik gegebenen Verhältnissen, wenn man unterstellt, daß das gesamte azimutale Magnetfeld bei der Gasentladung „mitgenommen“ ist ( $T' = 0$ ) und elektrische Ströme nur auf der Plasmaoberfläche vorhanden sind. Da mit einem azimutalen Gesamtstrom von

$$I = 10^5 \text{ A} = 3 \cdot 10^{14} \text{ el.stat. Einh.}$$

gearbeitet wurde, folgt aus (101), (102) und (103) auf Grund der Daten in Tab. 1

$$p = I^2 P / (2 \pi a^2 c^2 R'^2) = 4,36 \cdot 10^5 \text{ dyn} = 327 \text{ Torr},$$

$$t = 2 I T / (a c) = 2,04 \cdot 10^5 \text{ Gauß cm},$$

$$t' = 2 I T' / (a c) = 0.$$

Dies entspricht einer ungefähren Ausgangssituation vor der Gasentladung mit einem nach (6) berechneten Druck<sup>39</sup>

$$p_0 = (r^2 R / (r'^2 R'))^{5/3} p \approx 10 \text{ Torr}$$

und einem Magnetfeld

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{R - \sqrt{R^2 - r'^2}}{R' - \sqrt{R'^2 - r'^2}} \frac{t}{x} \mathfrak{e}_a,$$

das, wie man leicht bestätigt, innerhalb  $\mathfrak{S}'$  denselben Fluß besitzt, wie  $\mathfrak{B}$  innerhalb  $\mathfrak{S}$ ; insbesondere folgt hieraus an den Stellen  $x = R'$

$$|\mathfrak{B}_0| \approx 500 \text{ Gauß}.$$

Die Berücksichtigung von Störungen bis einschließlich  $m = 8$ , welche sich sämtlich als stabil erwei-

<sup>38</sup> R. J. TAYLOR, Proc. Phys. Soc., Lond. B **70**, 314 [1957].

<sup>39</sup> Benutzt wird hier die elementare Tatsache, daß das von einem Kreistorus umschlossene Volumen gleich dem Produkt aus Torusquerschnitt und Selenumfang ist.

Nr.	$m$	$2 N = 8$	$2 N = 12$	$2 N = 16$
1	1	−1,00001	−1,00001	−1,00001
	2	−1,00001	−1,00001	−1,00001
2	1	0,19807	0,19779	0,19778
	2	0,19802	0,19774	0,19774
3	1	0,08923	0,08923	0,08923
	2	0,09145	0,09145	0,09145
	3	0,09504	0,09504	0,09504
	4	0,09923	0,09921	0,09921
	5	—	0,07964	0,07964
	6	—	0,04226	0,04226
	7	—	—	0,01456
	8	—	—	−0,00253
4	1	0,17451	0,17450	0,17450
	2	0,17655	0,17653	0,17653
	3	0,17462	0,17434	0,17434
	4	0,13199	0,13142	0,13142
	5	—	0,08676	0,08675
	6	—	0,05086	0,05086
	7	—	—	0,02587
	8	—	—	0,01193
5	1	0,36933	0,36430	0,36414
	2	0,35615	0,35341	0,35326
	3	0,34447	0,34217	0,34213
	4	0,34467	0,34255	0,34251
	5	—	0,36189	0,36185
	6	—	0,40322	0,40319
	7	—	—	0,46634
	8	—	—	0,54909
6	1	0,11923	0,11876	0,11876
	2	0,24956	0,24827	0,24827
	3	0,46900	0,46409	0,46408
7	1	−0,01959	−0,01806	−0,01797
	2	−0,05359	−0,05292	−0,05289
8	1	0,00689	0,00711	0,00712
	2	−0,00125	−0,00104	−0,00103
9	1	−0,13191	−0,14174	−0,14222
10	1	0,06518	0,06944	0,06902
	2	0,09053	0,09380	0,09412
	3	0,15453	0,15602	0,15629
	4	0,25346	0,25128	0,25167

Tab. 2. Numerische Ergebnisse für  $R'F_{\text{Min}}^{*(m)} / 4 \pi I^2$ .

sen, ist bei diesem Beispiel ganz offensichtlich nicht ausreichend, um die Tendenz der  $F_{\text{Min}}^{*(m)}$  beurteilen zu können. Andererseits erlaubte es die verhältnismäßig geringe Speicherkapazität der benutzten Rechenmaschine<sup>36</sup> nicht, mit  $m$  über 8 und  $2N$  über 16 hinauszugehen. Wir haben es also mit einem Fall hart an der Grenze zwischen Stabilität und Instabilität zu tun, bei dem die Stabilitätsfrage durch das beschriebene Verfahren nicht in befriedigender Weise geklärt werden kann, solange keine entsprechenden Hilfsmittel bereit stehen.

*Beispiel 5.* Durch eine gegenüber Beispiel 4 etwas abgeänderte Geometrie (der Plasmatorus füllt einen größeren Raum aus) und Anbringung stärkerer Magnetfelder ergibt sich eine stabile Anordnung. Allerdings beobachtet man auch hier ein vom Zylinder her unbekanntes Verhalten, nämlich daß  $F_{\text{Min}}^{*(m)}$  für  $m \geq 1$  zunächst fällt, um erst von  $m = 3$  an monoton zuzunehmen.

*Beispiel 6.* Wir haben eine stabile Gleichgewichtskonfiguration vor uns, bei der  $F_{\text{Min}}^{*(m)}$  bereits von  $m = 1$  an monoton wächst.

*Beispiel 7.* Hier wurde für die Plasmaoberfläche eine Toruskoordinatenfläche ( $\varepsilon = -1$ ) gewählt. Es liegt Instabilität gegenüber Störungen mit  $m = 1$  und  $m = 2$  vor.

*Beispiel 8.* Obwohl nur die Lage des Plasmatorus gegenüber Beispiel 7 verändert wurde ( $\varepsilon = 1$ ), alle anderen Daten aber unversehrt übernommen sind, ergibt sich ein grundlegend anderes Stabilitätsverhalten, denn jetzt ist die Anordnung noch für Störungen mit  $m = 1$  stabil. Dieses Beispiel lehrt, daß die Annahme von Toruskoordinatenflächen als Gleichgewichtsgeometrien einen erheblichen Eingriff in die physikalische Struktur des Problems darstellt. Mit aller gebotenen Vorsicht wird man darüber hinaus vielleicht erwarten dürfen, daß die Toruskoordinatenlage ( $\varepsilon = -1$ ) ein *in Richtung Instabilität abweichendes* Ergebnis gegenüber einer „richtigeren“, d. h. die Randbedingung ( $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}'$ ) = 0 auf  $\mathfrak{S}'$  besser erfüllenden Lage (z. B.  $\varepsilon = 1$ ) liefert.

*Beispiel 9.* Trotz großer Aspektverhältnisse von Plasmaoberfläche und äußerem Leiter, also bei verhältnismäßig starkem Einfluß der Krümmungsverhältnisse, liegt Instabilität bereits für Störungen mit  $m = 1$  vor.

*Beispiel 10.* Durch Anbringung stärkerer Magnetfelder gegenüber den vorhergehenden Beispielen erhält man eine stabile Gleichgewichtskonfiguration. Dieses Beispiel zeigt ferner, daß selbst große Aspektverhältnisse des äußeren Leiters keinerlei Schwierigkeiten bereiten. Insbesondere konvergiert das numerische Verfahren auch hier mit wachsender Stützstellenzahl  $2N$ , wenn auch nicht ganz so schnell wie im Falle kleinerer Aspektverhältnisse.

### 15. Anhang: Die Randmatrizen $M_{\mu\nu}^{(m)}$ und $M'_{\mu\nu}^{(m)}$

In diesem Abschnitt werden die erforderlichen Schritte zur Gewinnung der zuvor benutzten Randmatrizen  $M_{\mu\nu}^{(m)}$  und  $M'_{\mu\nu}^{(m)}$  in kurzer Zusammenfassung wiedergegeben, die jederzeit ihre praktische Berechnung gestattet. Von einer Begründung dieses Verfahrens soll hier indessen unter Hinweis auf die Literatur<sup>40</sup> abgesehen werden.

Es ist zweckmäßig, im folgenden

$$x(\varphi) = x_1(\varphi), \quad y(\varphi) = y_1(\varphi), \quad x'(\varphi) = x_2(\varphi), \quad y'(\varphi) = y_2(\varphi)$$

zu setzen. Mit festem  $2N$  werden dann die durch (164) gegebenen Gewichte  $D_\mu$ ,  $\mu = -(2N-1), \dots, (2N-1)$ , berechnet und mit ihnen die Ableitungen  $\dot{x}_i(\varphi)$ ,  $\dot{y}_i(\varphi)$ ,  $\ddot{x}_i(\varphi)$ ,  $\ddot{y}_i(\varphi)$  in den Stützstellen durch (163) numerisch gewonnen<sup>41</sup>. Ferner werden die Konstanten

$$R_\mu = -\frac{1}{N} \left\{ \frac{(-1)^\mu}{2N} + \sum_{\varrho=1}^{N-1} \frac{1}{\varrho} \cos \frac{\mu \varrho \pi}{N} \right\}, \quad \mu = -(2N-1), \dots, (2N-1), \quad (246)$$

ein für allemal bereitgestellt.

Als nächstes berechnet man eine Reihe von Kernfunktionen, natürlich immer nur an den Stützstellen, wodurch jeweils  $2N$ -reihige quadratische Matrizen entstehen:

$$K_{ij}(\varphi, \psi) = \begin{cases} \frac{2}{[x_i(\varphi) - x_j(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_j(\psi)]^2} \frac{[x_i(\varphi) - x_j(\psi)] \dot{y}_i(\varphi) - [y_i(\varphi) - y_j(\psi)] \dot{x}_i(\varphi)}{[x_i(\varphi) - x_j(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_j(\psi)]^2}, & \text{falls } i=j, \varphi \neq \psi \text{ und falls } i \neq j, \\ \frac{\dot{x}_i(\varphi) \dot{y}_i(\varphi) - \dot{y}_i(\varphi) \dot{x}_i(\varphi)}{[\dot{x}_i(\varphi)]^2 + [\dot{y}_i(\varphi)]^2}, & \text{falls } i=j, \varphi = \psi, \end{cases} \quad (247)$$

$$Q_{ij}(\varphi, \psi) = \frac{[y_i(\varphi) - y_j(\psi)] \dot{x}_i(\varphi) - x_i(\varphi) \dot{y}_i(\varphi)}{x_i(\varphi) x_j(\psi)}, \quad (248)$$

$$k_{ij}(\varphi, \psi) = 2 \sqrt{\frac{x_i(\varphi) x_j(\psi)}{[x_i(\varphi) + x_j(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_j(\psi)]^2}}, \quad (249)$$

$$k'_{ij}(\varphi, \psi) = \sqrt{\frac{[x_i(\varphi) - x_j(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_j(\psi)]^2}{[x_i(\varphi) + x_j(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_j(\psi)]^2}}. \quad (250)$$

Zwischen (249) und (250) besteht der Zusammenhang  $[k_{ij}(\varphi, \psi)]^2 + [k'_{ij}(\varphi, \psi)]^2 = 1$ ; (251)

außerdem folgen die Ungleichungen  $0 < k_{ij}(\varphi, \psi) \leq 1$ ,  $0 \leq k'_{ij}(\varphi, \psi) < 1$ , (252), (253)

wobei das Gleichheitszeichen nur im Falle  $i=j$  und auch nur dann für  $\varphi=\psi$  angenommen wird. Weitere Kernfunktionen werden durch die folgenden, in allen praktischen Fällen gut brauchbaren Potenzreihen mit dem Konvergenzradius 1 definiert<sup>42</sup>:

$$E_{ij}^*(\varphi, \psi) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r^* [k'_{ij}(\varphi, \psi)]^{2r}, \quad E_{ij}^{**}(\varphi, \psi) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r^{**} [k'_{ij}(\varphi, \psi)]^{2r}, \quad (254), (255)$$

$$G_{ij}^*(\varphi, \psi) = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_r^* [k'_{ij}(\varphi, \psi)]^{2r}, \quad G_{ij}^{**}(\varphi, \psi) = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_r^{**} [k'_{ij}(\varphi, \psi)]^{2r}, \quad (256), (257)$$

die Koeffizienten berechnen sich rekursiv aus

$$\varepsilon_0^* = 1, \quad \varepsilon_1^* = -\frac{1}{4}, \quad \varepsilon_r^* = \frac{(2r-1)(2r-3)}{4r(r-1)} \varepsilon_{r-1}^* - \frac{4r^2-6r+3}{8r^2(r-1)^2} \varepsilon_{r-1}^{**}, \quad r \geq 2, \quad (258)$$

$$\varepsilon_0^{**} = 0, \quad \varepsilon_1^{**} = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_r^{**} = \frac{(2r-1)(2r-3)}{4r(r-1)} \varepsilon_{r-1}^{**}, \quad r \geq 2, \quad (259)$$

$$\gamma_0^* = -1, \quad \gamma_r^* = \frac{(2r-1)(2r-3)}{4r^2} \gamma_{r-1}^* - \frac{4r-3}{4r^3} \gamma_{r-1}^{**}, \quad r \geq 1, \quad (260)$$

$$\gamma_0^{**} = 1, \quad \gamma_r^{**} = \frac{(2r-1)(2r-3)}{4r^2} \gamma_{r-1}^{**}, \quad r \geq 1. \quad (261)$$

<sup>40</sup> E. MARTENSEN, demnächst in Acta Math.

<sup>41</sup> Die Indizes  $i$  und  $j$  sollen in diesem Abschnitt stets die Zahlen 1 und 2 durchlaufen.

<sup>42</sup> E. MARTENSEN, Symposium on the Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations, Integral and Integro-Differential Equations, 129–150. Birkhäuser, Basel 1960.

Ferner sei

$$\tilde{E}_{ij}^*(\varphi, \psi) = \begin{cases} E_{ii}^*(\varphi, \psi) + E_{ii}^{**}(\varphi, \psi) \ln \left\{ 8 \left( \frac{[x_i(\varphi) + x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2}{[x_i(\varphi) - x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2} \sin^2 \frac{\varphi - \psi}{2} \right)^{1/2} \right\}, \\ \quad \text{falls } i = j, \varphi \neq \psi, \\ 1, \quad \text{falls } i = j, \varphi = \psi, \\ E_{ij}^*(\varphi, \psi), \quad \text{falls } i \neq j, \end{cases} \quad (262)$$

$$\tilde{G}_{ij}^*(\varphi, \psi) = \begin{cases} G_{ii}^*(\varphi, \psi) + G_{ii}^{**}(\varphi, \psi) \ln \left\{ 8 \left( \frac{[x_i(\varphi) + x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2}{[x_i(\varphi) - x_i(\psi)]^2 + [y_i(\varphi) - y_i(\psi)]^2} \sin^2 \frac{\varphi - \psi}{2} \right)^{1/2} \right\}, \\ \quad \text{falls } i = j, \varphi \neq \psi, \\ -1 + \ln \left\{ 8 x_i(\varphi) ([\dot{x}_i(\varphi)]^2 + [\dot{y}_i(\varphi)]^2)^{-1/2} \right\}, \quad \text{falls } i = j, \varphi = \psi, \\ G_{ij}^*(\varphi, \psi), \quad \text{falls } i \neq j. \end{cases} \quad (263)$$

Außerdem benötigt man die noch von einem Parameter  $\mu$  abhängenden Kernfunktionen  $p_{ij}^{(\mu)}(\varphi, \psi)$  und  $q_{ij}^{(\mu)}(\varphi, \psi)$  für  $\mu = (m-1), m, (m+1)$ . Sie werden erklärt durch die Rekursionsformeln

$$p_{ij}^{(0)}(\varphi, \psi) = 0, \quad p_{ij}^{(1)}(\varphi, \psi) = 0, \quad (264)$$

$$(2\mu-1) p_{ij}^{(\mu+1)}(\varphi, \psi) - 4\mu \frac{2 - [k_{ij}(\varphi, \psi)]^2}{[k_{ij}(\varphi, \psi)]^2} p_{ij}^{(\mu)}(\varphi, \psi) + (2\mu+1) p_{ij}^{(\mu-1)}(\varphi, \psi) = \frac{8\mu}{[k_{ij}(\varphi, \psi)]^2}, \quad \mu = 1, \dots, m,$$

$$q_{ij}^{(0)}(\varphi, \psi) = 0, \quad q_{ij}^{(1)}(\varphi, \psi) = -\frac{2}{[k_{ij}(\varphi, \psi)]^2}, \quad (265)$$

$$(2\mu-1) q_{ij}^{(\mu+1)}(\varphi, \psi) - 4\mu \frac{2 - [k_{ij}(\varphi, \psi)]^2}{[k_{ij}(\varphi, \psi)]^2} q_{ij}^{(\mu)}(\varphi, \psi) + (2\mu+1) q_{ij}^{(\mu-1)}(\varphi, \psi) = 0, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Damit beherrscht man auch

$$X_{ij}^*(\varphi, \psi) = k_{ij}(\varphi, \psi) \left\{ \tilde{E}_{ij}^*(\varphi, \psi) \sum_{i=1}^{\infty} K_{ji}(\psi, \varphi) \right. \\ - \frac{1}{2} [k_{ij}(\varphi, \psi)]^2 [p_{ij}^{(m)}(\varphi, \psi) \tilde{E}_{ij}^*(\varphi, \psi) + q_{ij}^{(m)}(\varphi, \psi) \tilde{G}_{ij}^*(\varphi, \psi)] \frac{\dot{y}_j(\psi)}{x_j(\psi)} \\ - \frac{1}{4} [k_{ij}(\varphi, \psi)]^2 [(p_{ij}^{(m-1)}(\varphi, \psi) + p_{ij}^{(m+1)}(\varphi, \psi)) \tilde{E}_{ij}^*(\varphi, \psi) \\ \left. + (q_{ij}^{(m-1)}(\varphi, \psi) + q_{ij}^{(m+1)}(\varphi, \psi)) \tilde{G}_{ij}^*(\varphi, \psi)] Q_{ji}(\psi, \varphi) \right\} \sqrt{\frac{x_i(\varphi)}{x_j(\psi)}}, \quad (266)$$

$$Y_{ij}^*(\varphi, \psi) = \frac{1}{4m} [k_{ij}(\varphi, \psi)]^3 \left\{ [p_{ij}^{(m-1)}(\varphi, \psi) - p_{ij}^{(m+1)}(\varphi, \psi)] \tilde{E}_{ij}^*(\varphi, \psi) \right. \\ \left. + [q_{ij}^{(m-1)}(\varphi, \psi) - q_{ij}^{(m+1)}(\varphi, \psi)] \tilde{G}_{ij}^*(\varphi, \psi) \right\} \frac{y_i(\varphi) - y_j(\psi)}{\sqrt{x_i(\varphi) x_j(\psi)}}, \quad (267)$$

$$Z_{ij}^*(\varphi, \psi) = \frac{1}{4m} [k_{ij}(\varphi, \psi)]^3 \left\{ [p_{ij}^{(m-1)}(\varphi, \psi) - p_{ij}^{(m+1)}(\varphi, \psi)] \tilde{E}_{ij}^*(\varphi, \psi) \right. \\ \left. + [q_{ij}^{(m-1)}(\varphi, \psi) - q_{ij}^{(m+1)}(\varphi, \psi)] \tilde{G}_{ij}^*(\varphi, \psi) \right\} \sqrt{\frac{x_j(\psi)}{x_i(\varphi)} ([\dot{x}_j(\psi)]^2 + [\dot{y}_j(\psi)]^2)} \quad (268)$$

sowie die weiteren Größen  $X_{ij}^{**}(\varphi, \psi)$ ,  $Y_{ij}^{**}(\varphi, \psi)$ ,  $Z_{ij}^{**}(\varphi, \psi)$ , die dadurch erklärt sind, daß man  $\tilde{E}_{ij}^*(\varphi, \psi)$  und  $\tilde{G}_{ij}^*(\varphi, \psi)$  in (266) bis (268) bzw. ersetzt durch  $E_{ij}^{**}(\varphi, \psi)$  und  $G_{ij}^{**}(\varphi, \psi)$ .

Die Funktionswerte der hier aufgezählten Kernfunktionen an den Stützstellen kennzeichnen wir wieder zweckmäßigerweise durch Anbringung von Indizes, die die Werte von 0 bis  $(2N-1)$  durchlaufen, z. B.

$$k'_{ij} \left( \frac{\mu \pi}{N}, \frac{\nu \pi}{N} \right) = k'_{ij\mu\nu}, \quad p_{ij}^{(m-1)} \left( \frac{\mu \pi}{N}, \frac{\nu \pi}{N} \right) = p_{ij\mu\nu}^{(m-1)} \quad \text{etc.}$$

Anschließend sind die Matrizen

$$X_{ii\mu\nu} = X_{ii\mu\nu}^* - N R_{\nu-\mu} X_{ii\mu\nu}^{**}, \quad X_{ij\mu\nu} = X_{ij\mu\nu}^* + X_{ij\mu\nu}^{**} \ln \frac{4}{k'_{ij\mu\nu}}, \quad \text{falls } i \neq j, \quad (269)$$

$$Y_{ii\mu\nu} = Y_{ii\mu\nu}^* - N R_{\nu-\mu} Y_{ii\mu\nu}^{**}, \quad Y_{ij\mu\nu} = Y_{ij\mu\nu}^* + Y_{ij\mu\nu}^{**} \ln \frac{4}{k'_{ij\mu\nu}}, \quad \text{falls } i \neq j, \quad (270)$$

$$Z_{i\mu\nu} = Z_{i\mu\nu}^* - N R_{\nu-\mu} Z_{i\mu\nu}^{**}, \quad Z_{ij\mu\nu} = Z_{ij\mu\nu}^* + Z_{ij\mu\nu}^{**} \ln \frac{4}{k_{ij\mu\nu}}, \quad \text{falls } i \neq j, \quad ^{43} \quad (271)$$

sowie hieraus

$$X_{ij\mu\nu}' = X_{ij\mu\nu} + \sum_{\varrho=0}^{2N-1} D_{\nu-\varrho} Y_{ij\mu\varrho} \quad (272)$$

zu berechnen. Die Randmatrix  $M_{\varrho\nu}^{(m)}$  berechnet man schließlich aus der Matrixgleichung

$$\sum_{\varrho=0}^{2N-1} \left( \delta_{\mu\varrho} - \frac{1}{2N} X_{11\mu\varrho}' \right) M_{\varrho\nu}^{(m)} = -\frac{1}{2N} Z_{11\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, \dots, (2N-1), \quad (273)$$

die als lineares Gleichungssystem mit  $2N$  Unbekannten (das sind die jeweiligen, für festes  $\nu$  erhaltenen Spaltenelemente der Randmatrix) und  $2N$  inhomogenen Seiten behandelt werden kann. Die Randmatrix  $M_{\mu\nu}^{(m)}$  ergibt sich zusammen mit einer gleichfalls  $2N$ -reihigen (jedoch für die Stabilitätsrechnung bedeutungslosen) Matrix  $\tilde{M}_{\mu\nu}^{(m)}$  aus dem gekoppelten System

$$\begin{aligned} \sum_{\varrho=0}^{2N-1} \left( \delta_{\mu\varrho} + \frac{1}{2N} X_{11\mu\varrho}' \right) M_{\varrho\nu}^{(m)} - \frac{1}{2N} \sum_{\varrho=0}^{2N-1} X_{12\mu\varrho}' \tilde{M}_{\varrho\nu}^{(m)} &= \frac{1}{2N} Z_{11\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, \dots, (2N-1), \\ \frac{1}{2N} \sum_{\varrho=0}^{2N-1} X_{21\mu\varrho}' M_{\varrho\nu}^{(m)} + \sum_{\varrho=0}^{2N-1} \left( \delta_{\mu\varrho} - \frac{1}{2N} X_{22\mu\varrho}' \right) \tilde{M}_{\varrho\nu}^{(m)} &= \frac{1}{2N} Z_{21\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, \dots, (2N-1). \end{aligned} \quad (274)$$

Durch Zusammenfassen der entsprechenden Spaltenelemente von  $M_{\mu\nu}^{(m)}$  und  $\tilde{M}_{\mu\nu}^{(m)}$  lässt sich diese Matrixgleichung als lineares Gleichungssystem mit  $4N$  Unbekannten und  $2N$  inhomogenen Seiten auffassen.

Der Verfasser dankt den Herren Dr. R. Lüst und Dr. S. Witkowski für wertvolle Diskussionen, die diese Arbeit sehr gefördert haben.

<sup>43</sup> Von den Matrizen  $Z_{ij\mu\nu}$  werden im folgenden nur  $Z_{11\mu\nu}$  und  $Z_{21\mu\nu}$  benötigt.